第十三章 轴对称

13.3.2 等边三角形

第1课时 等边三角形的性质与判定

学习目标

1．探索等边三角形的性质和判定．（重点）

2．能运用等边三角形的性质和判定进行计算和证明．（难点）

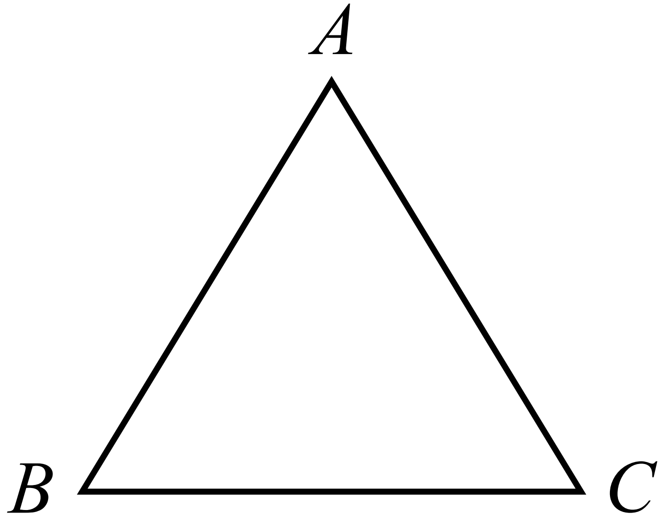
创设情境，导入新知

下列图片中有你熟悉的数学图形吗？你能说出此图形的名称吗？

创设情境，导入新知

问题　满足什么条件的三角形是等边三角形？

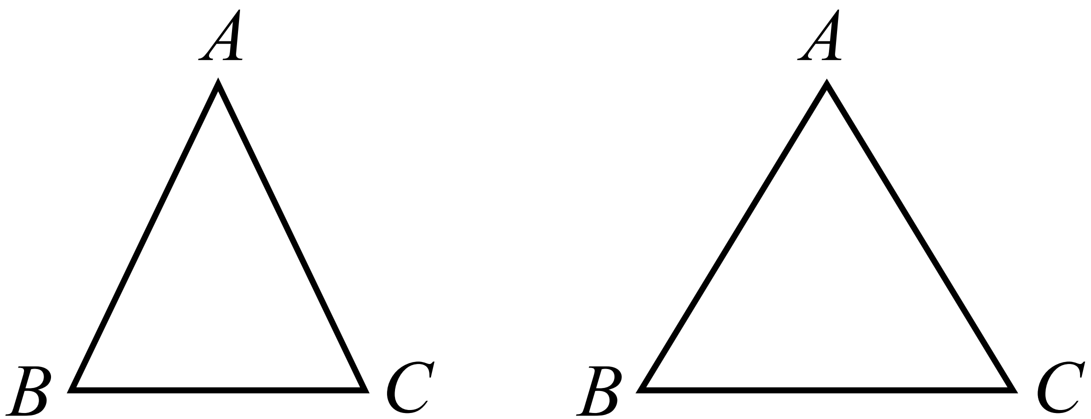
三条边都相等的三角形是等边三角形.



等边三角形

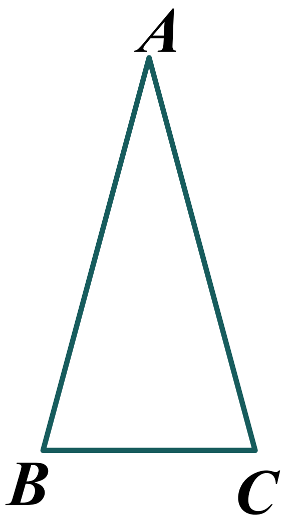
创设情境，导入新知

请分别画出一个等腰三角形和等边三角形，结合你画的图形说出它们有什么区别和联系？



联系：等边三角形是特殊的等腰三角形；

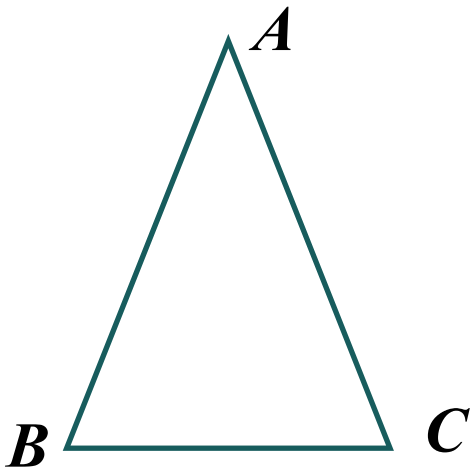
区别：等边三角形有三条相等的边，而等腰三角形只有两条.

名称	图形	定义	性质	判定
等腰三角形		有两条边相等的三角形叫做等腰三角形	两腰相等	两边相等
			等边对等角	等角对等边
			三线合一	
			轴对称图形	

一 等边三角形的性质

类比探究

问题1 等边三角形的三个内角之间有什么关系？



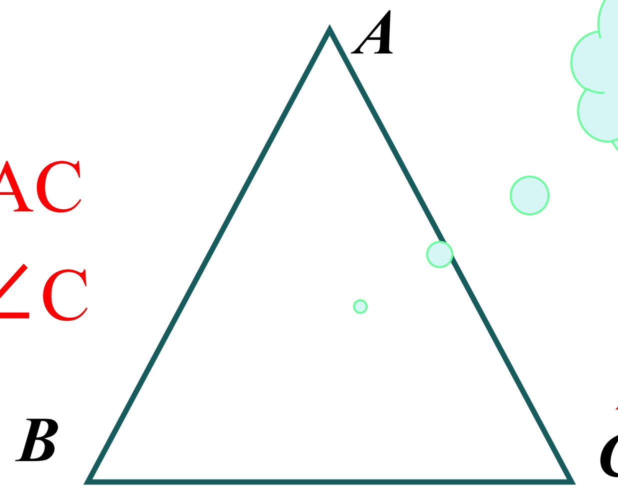
等腰三角形

AB=AC

∠B=∠C

AB=AC

∠B=∠C



内角和为180°

AC=BC

∠A=∠B

等边三角形

AB=AC=BC

∠A=∠B=∠C =60°

结论： 等边三角形的三个内角都相等，并且每一个角都等于60°．

已知：AB=AC=BC，

求证：∠A= ∠ B=∠C= 60°．

证明：∵AB=AC.

∴∠B=∠C .(等边对等角)

同理 ∠A=∠C .

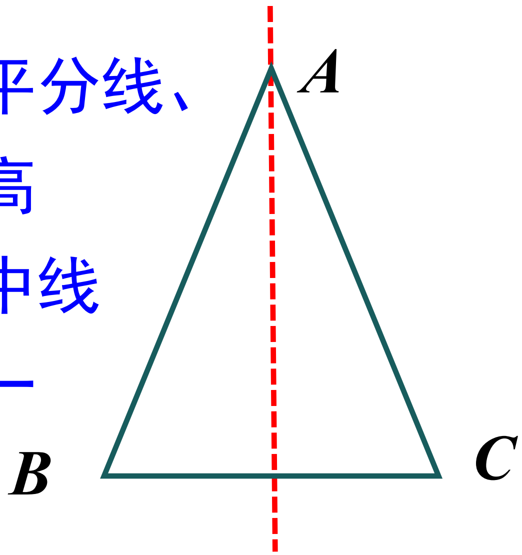
∴∠A=∠B=∠C.

∵ ∠A+∠B+∠C=180°，

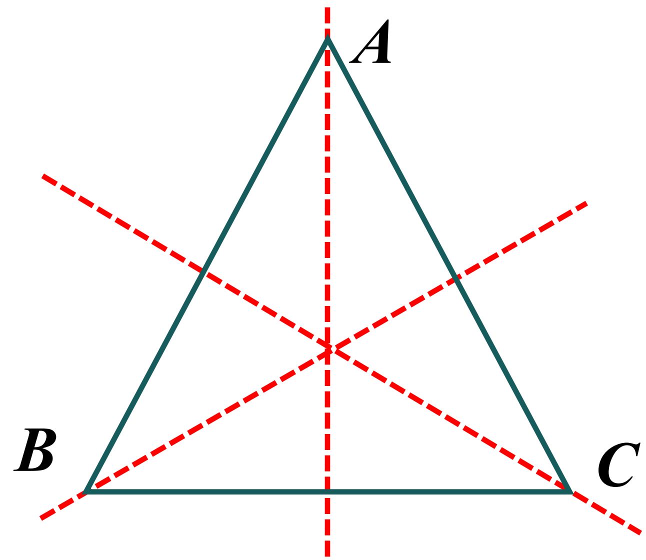
∴ ∠A= ∠B= ∠C=60 °．

问题2 等边三角形有“三线合一”的性质吗?等边三角形有几条对称轴?

顶角的平分线、
底边的高
底边的中线
三线合一



一条对称轴



三条对称轴

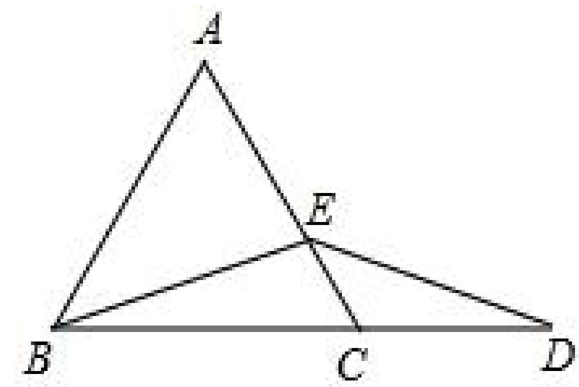
结论:等边三角形每条边上的中线,高和所对角的平分线都“三线合一”.

知识要点

图形	等腰三角形	等边三角形
性质	两条边相等	三条边都相等
	两个底角相等	三个角都相等，且都是60°
	底边上的中线、高和顶角的平分线互相重合	每一边上的中线、高和这一边所对的角的平分线互相重合
	对称轴（1条）	对称轴（3条）

典例精析

例1 如图，$\triangle ABC$是等边三角形，E是AC上一点，D是BC延长线上一点，连接BE，DE，若$\angle ABE=40°$，$BE=DE$，求$\angle CED$的度数.



解：$\because \triangle ABC$是等边三角形，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB=60°$.

$\because \angle ABE=40°$，

$\therefore \angle EBC=\angle ABC-\angle ABE=60°-40°=20°$.

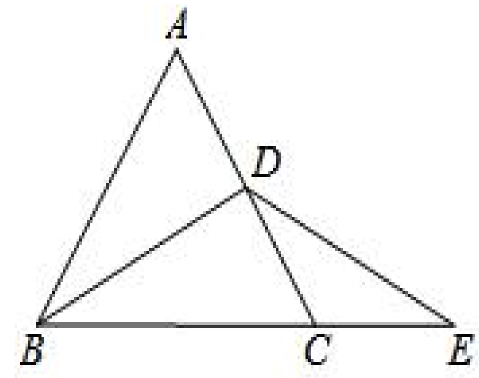
$\because BE=DE$，

$\therefore \angle D=\angle EBC=20°$，

$\therefore \angle CED=\angle ACB-\angle D=40°$.

变式训练：

如图，△ABC是等边三角形，BD平分∠ABC，延长BC到E，使得CE=CD．求证：BD=DE．



证明：∵△ABC是等边三角形，BD是角平分线，

∴∠ABC=∠ACB=60°，∠DBC=30°．

又∵CE=CD，

∴∠CDE=∠CED．

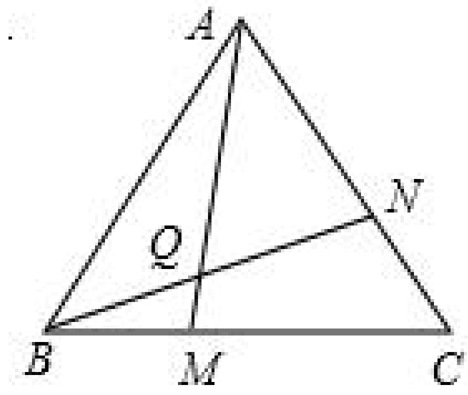
又∵∠BCD=∠CDE+∠CED，

∴∠CDE=∠CED=30°．

∴∠DBC=∠DEC．

∴DB=DE（等角对等边）．

例2 $\triangle ABC$为正三角形，点M是BC边上任意一点，点N是CA边上任意一点，且$BM=CN$，BN与AM相交于Q点，$\angle BQM$等于多少度？



解：$\because \triangle ABC$为正三角形，

$\therefore \angle ABC=\angle C=\angle BAC=60°$，$AB=BC$.

又$\because$ BM＝CN，

$\therefore \triangle AMB \cong \triangle BNC$(SAS)，

$\therefore \angle BAM=\angle CBN$，

$\therefore \angle BQM=\angle ABQ+\angle BAM$

$=\angle ABQ+\angle CBN=\angle ABC=60°$.

等边三角形的判定

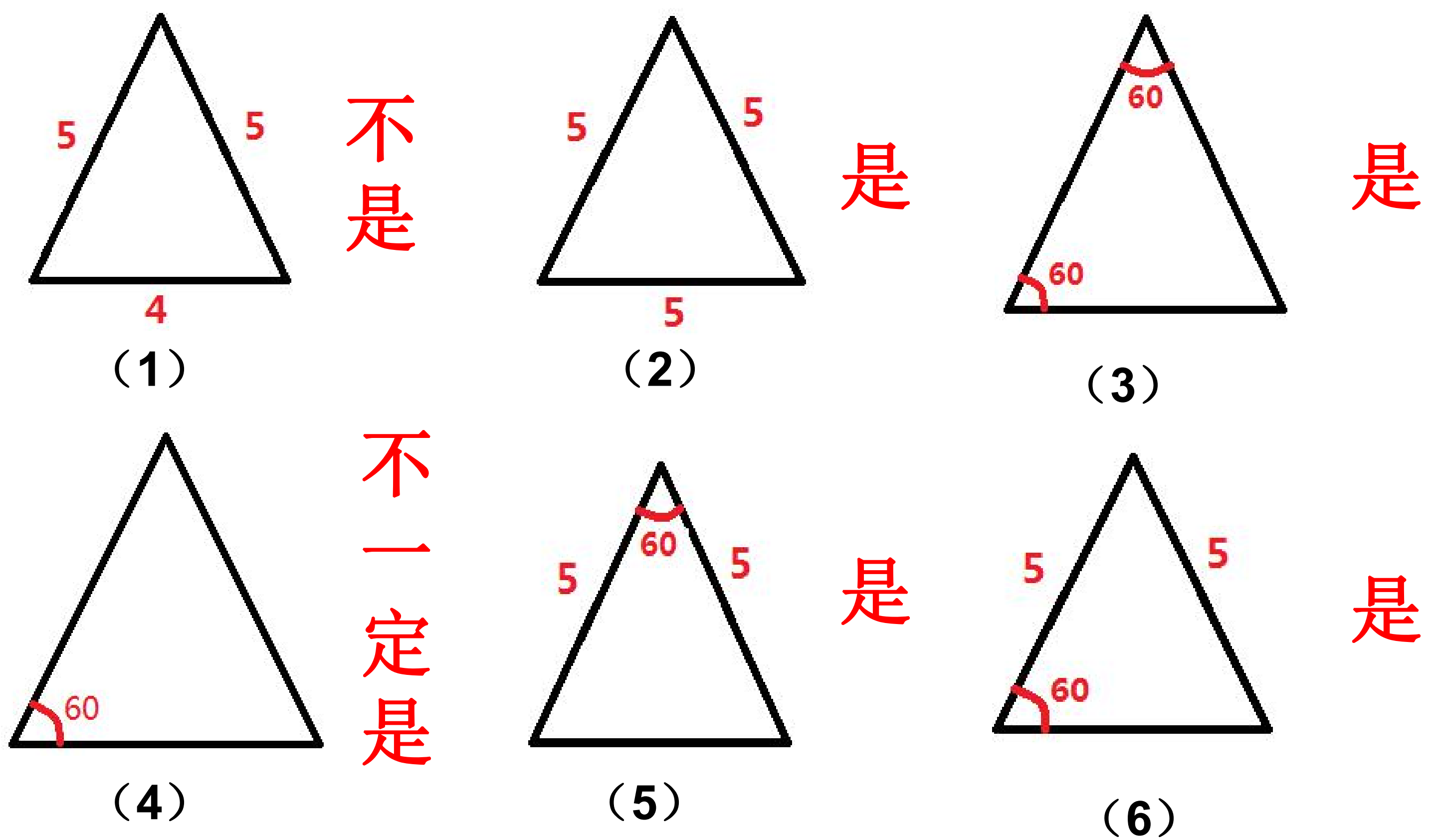
类比探究

图形	等腰三角形	等边三角形
判定	从边看：两条边相等的三角形是等腰三角形	三条边都相等的三角形是等边三角形
	从角看：两个角相等的三角形是等腰三角形	三个角都相等的三角形是等边三角形

◆等边三角形的判定方法：

有一个角是60°的等腰三角形是等边三角形.

辩一辩：根据条件判断下列三角形是否为等边三角形.



典例精析

例3 如图，在等边三角形ABC中，$DE \parallel BC$，求证：$\triangle ADE$是等边三角形.

证明：∵ $\triangle ABC$是等边三角形，

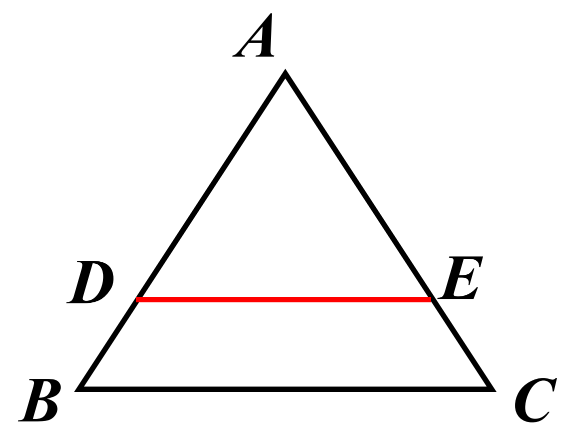
∴ $\angle A = \angle B = \angle C$.

∵ $DE // BC$，

∴ $\angle ADE = \angle B$，$\angle AED = \angle C$.

∴ $\angle A = \angle ADE = \angle AED$.

∴ $\triangle ADE$是等边三角形.



想一想：本题还有其他证法吗？

变式1　若点D、E在边AB、AC的反向延长线上，且$DE \parallel BC$，结论依然成立吗？

证明：∵ $\triangle ABC$是等边三角形，

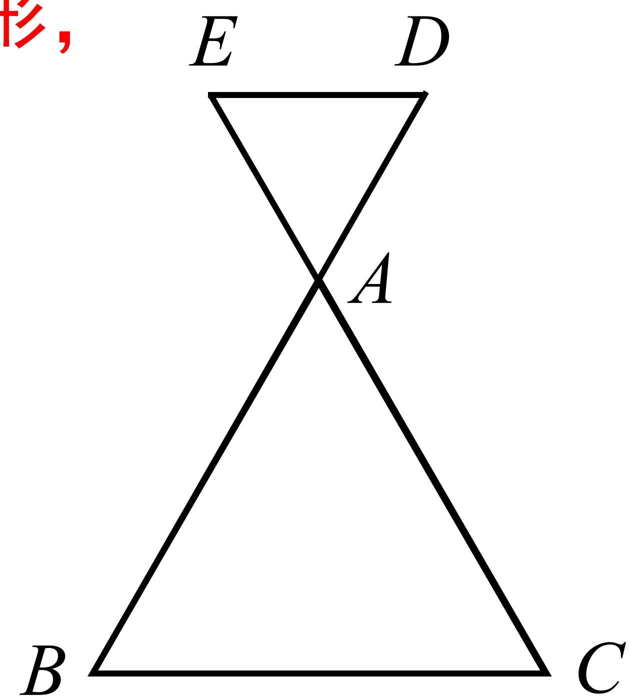
∴ $\angle BAC = \angle B = \angle C = 60°$．

∵ $DE \parallel BC$，

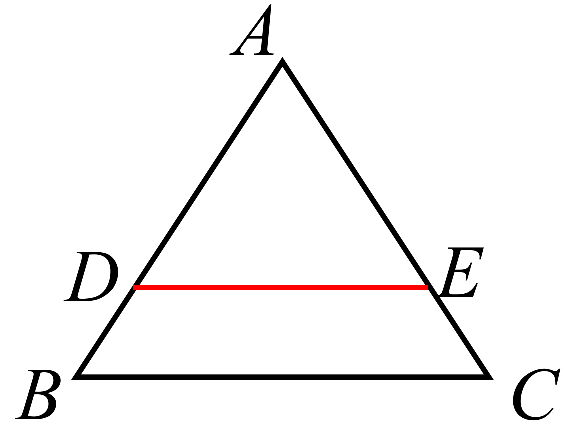
∴ $\angle B = \angle D$，$\angle C = \angle E$.

∴ $\angle EAD = \angle D = \angle E$.

∴ $\triangle ADE$是等边三角形.



变式3：上题中，若将条件$DE \parallel BC$改为$AD=AE$，$\triangle ADE$还是等边三角形吗?试说明理由.



证明：∵ $\triangle ABC$是等边三角形，

∴ $\angle A=\angle B=\angle C$.

∵ $AD=AE$,

∴ $\angle ADE=\angle B$, $\angle AED=\angle C$.

∴ $\angle A=\angle ADE=\angle AED$.

∴ $\triangle ADE$是等边三角形.

例4 等边△ABC中，点P在△ABC内，点Q在△ABC外，且∠ABP＝∠ACQ，BP＝CQ，问△APQ是什么形状的三角形？试证明你的结论.

解：△APQ为等边三角形.

证明如下：∵△ABC为等边三角形，

∴AB＝AC.

∵BP＝CQ，∠ABP＝∠ACQ，

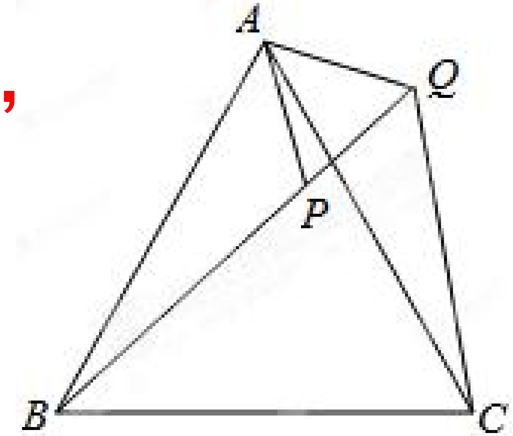
∴△ABP≌△ACQ(SAS)，

∴AP＝AQ，∠BAP＝∠CAQ.

∵∠BAC＝∠BAP＋∠PAC＝60°，

∴∠PAQ＝∠CAQ＋∠PAC＝60°，

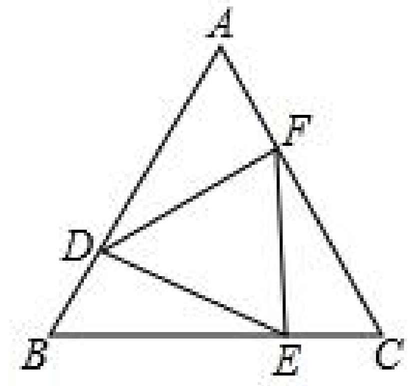
∴△APQ是等边三角形.



方法总结：判定一个三角形是等边三角形有以下方法：一是证明三角形三条边相等；二是证明三角形三个内角相等；三是先证明三角形是等腰三角形，再证明有一个内角等于60°．

针对训练： 如图，等边△ABC中，D、E、F分别是各边上的一点，且AD=BE=CF.

求证：△DEF是等边三角形.



证明：∵△ABC为等边三角形，且AD=BE=CF

∴AF=BD=CE，∠A=∠B=∠C=60°，

∴△ADF≌△BED≌△CFE（SAS），

∴DF=ED=EF,

∴△DEF是等边三角形.

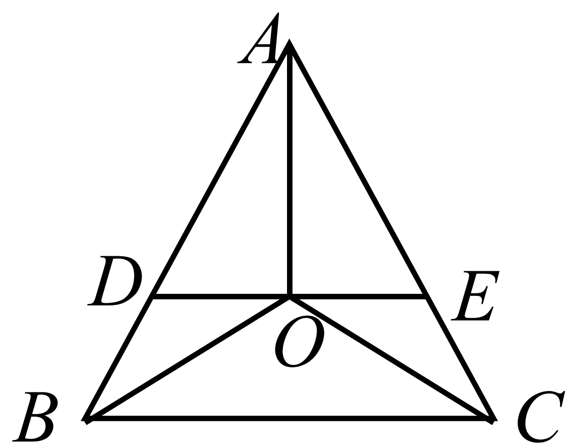
1.等边三角形的两条高线相交成钝角的度数是（ B ）

A．105° B．120° C．135° D．150°

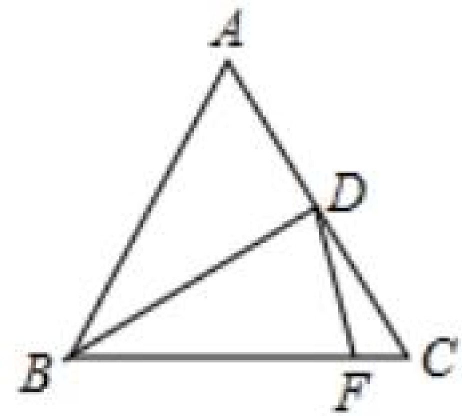
2.如图，等边三角形ABC的三条角平分线交于点O，$DE \parallel BC$，则这个图形中的等腰三角形共有（ D ）

A．4个 B．5个

C．6个 D．7个



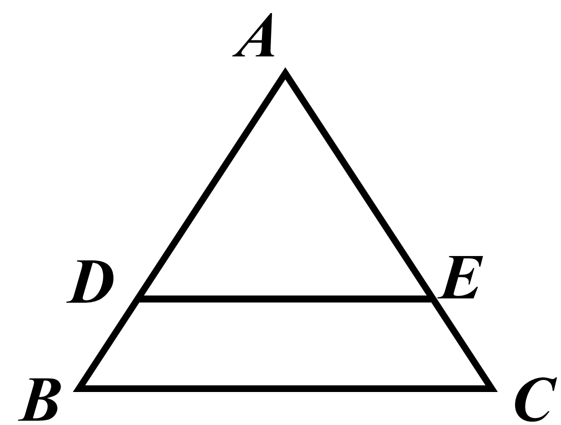
3.在等边△ABC中，BD平分∠ABC，BD=BF，则∠CDF的度数是（ **B** ）



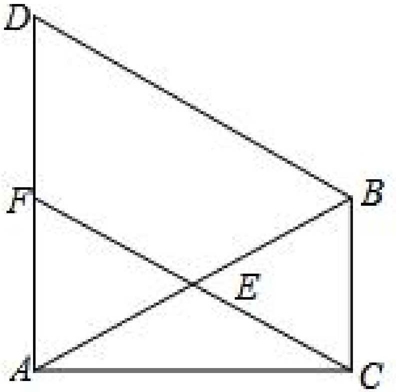
A．10°　　B．15°

C．20°　　D．25°

4.如图, △*ABC*和△*ADE*都是等边三角形，已知△*ABC*的周长为18cm,*EC* =2cm,则△*ADE*的周长是 **12** cm.



5.如图，在△ABC中，∠ACB=90°，∠CAB=30°，以AB为边在△ABC外作等边△ABD，E是AB的中点，连接CE并延长交AD于F．求证：△AEF≌△BEC.



证明：∵△ABD是等边三角形，

∴∠DAB=60°，

∵∠CAB=30°，∠ACB=90°，

∴∠EBC=180°-90°-30°=60°，

∴∠FAE=∠EBC.

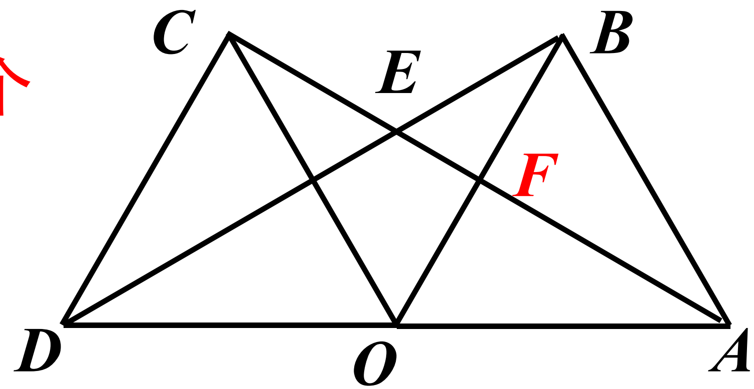
∵E为AB的中点，

∴AE=BE.

又∵∠AEF＝∠BEC，

∴△AEF≌△BEC（ASA）.

6.如图，A、O、D三点共线，$\triangle OAB$和$\triangle OCD$是两个全等的等边三角形，求$\angle AEB$的大小.



解：$\because \triangle OAB$和$\triangle OCD$是两个全等的等边三角形.

$\therefore AO=BO, CO=DO$,

$\angle AOB=\angle COD=60°$.

$\because A$、O、D三点共线，

$\therefore \angle DOB=\angle COA=120°$，

$\therefore \triangle COA \cong \triangle DOB$(SAS).

$\therefore \angle DBO=\angle CAO$.

设OB与EA相交于点F,

$\because \angle EFB=\angle AFO$,

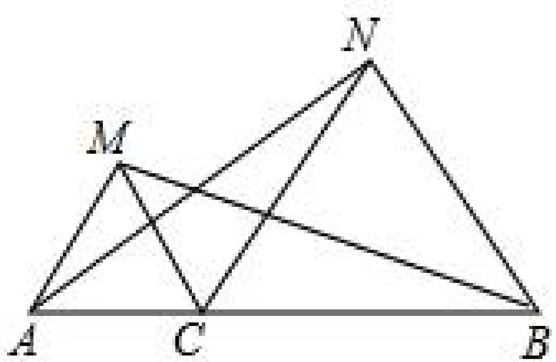
$\therefore \angle AEB=\angle AOB=60°$.

拓展提升：

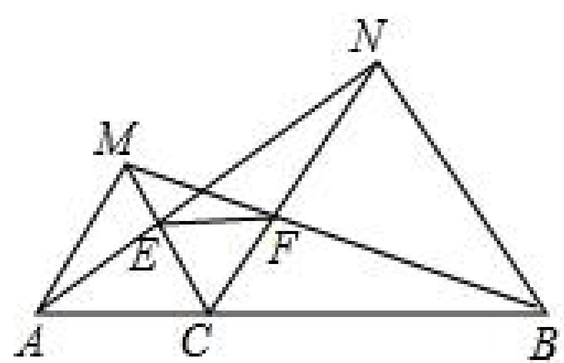
7.图①、图②中，点C为线段AB上一点，$\triangle ACM$与$\triangle CBN$都是等边三角形.

(1)如图①，线段AN与线段BM是否相等？请说明理由；

(2)如图②，AN与MC交于点E，BM与CN交于点F，探究$\triangle CEF$的形状，并证明你的结论.



图①



图②

解：(1)$AN=BM$.

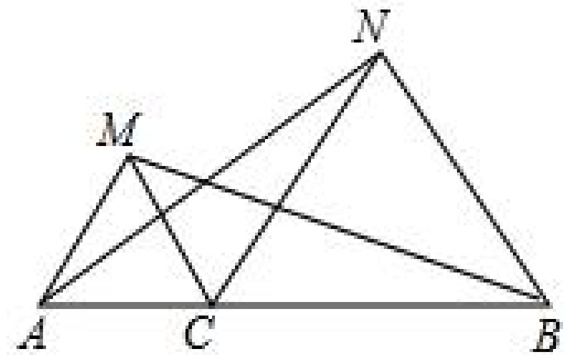
理由：∵$\triangle ACM$与$\triangle CBN$都是等边三角形，

∴$AC=MC$，$CN=CB$，$\angle ACM=\angle BCN=60°$.

∴$\angle ACN=\angle MCB$.

∴$\triangle ACN\cong\triangle MCB$(SAS).

∴$AN=BM$.



图①

(2)△CEF是等边三角形.

证明：∵∠ACE＝∠FCM=60°，

∴∠ECF=60°.

∵△ACN≌△MCB，

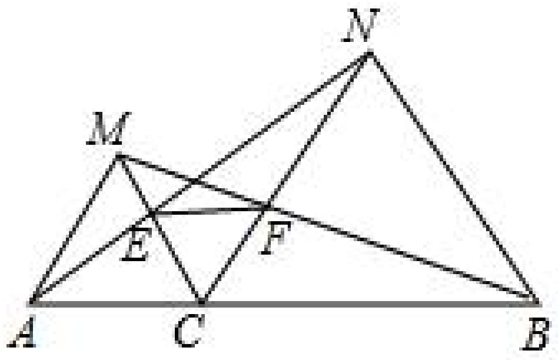
∴∠CAE＝∠CMB.

∵AC＝MC，

∴△ACE≌△MCF(ASA)，

∴CE＝CF.

∴△CEF是等边三角形.



图②

等边三角形

- 定义 —特殊性→ 底=腰
- 性质 —特殊性→
  - 边 → 三边相等
  - 角 → 三个角都等于60°
  - 轴对称性 → 轴对称图形，每条边上都具有“三线合一”性质
- 判定 —特殊性→
  - 三边法
  - 三角法
  - 等腰三角形法