第十八章 平行四边形

18.2.1 矩 形

第1课时 矩形的性质

导入新课 讲授新课 当堂练习 课堂小结

学习目标

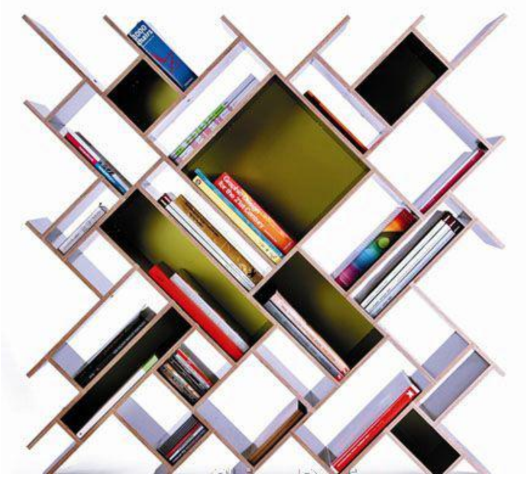
1.理解矩形的概念，知道矩形与平行四边形的区别与联系.（重点）

2.会证明矩形的性质，会用矩形的性质解决简单的问题.（重点、难点）

3.掌握直角三角形斜边中线的性质，并会简单的运用.（重点）

情景引入

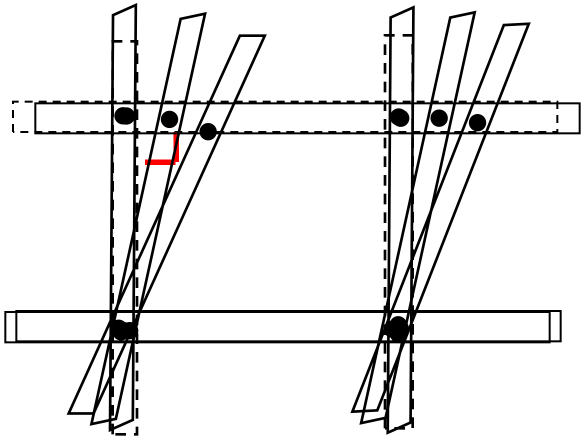
观察下面图形，长方形在生活中无处不在.



思考　长方形跟我们前面学习的平行四边形有什么关系？

一 矩形的性质

活动1：利用一个活动的平行四边形教具演示，使平行四边形的一个内角变化，请同学们注意观察.



矩形

归纳总结

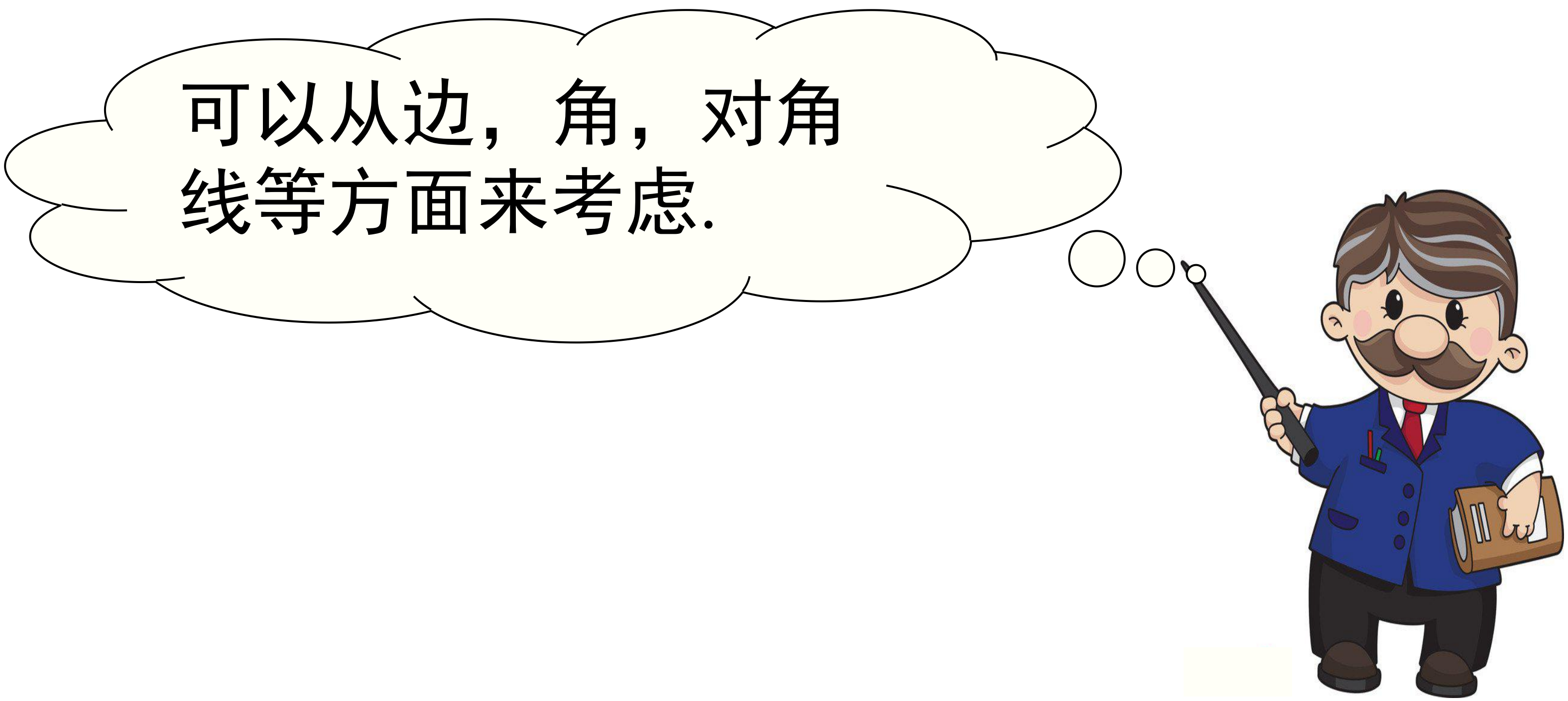
定义：有一个角是直角的平行四边形叫做矩形.
也叫做长方形.

平行四边形 $\xrightarrow[\text{是直角}]{\text{有一个角}}$ 矩形

★矩形是特殊的平行四边形.

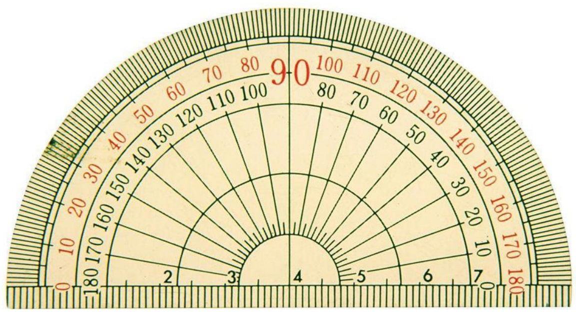
平行四边形不一定是矩形.

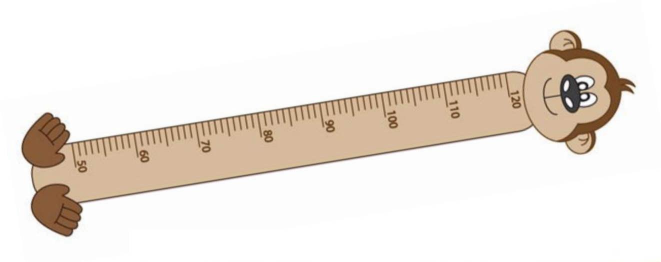
思考　因为矩形是平行四边形，所以它具有平行四边形的所有性质，由于它有一个角为直角，它是否具有一般平行四边形不具有的一些特殊性质呢？



活动2：

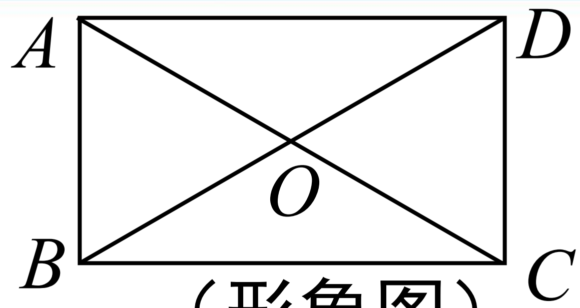
准备素材：直尺、量角器、橡皮擦、课本、铅笔盒等.






（1）请同学们以小组为单位,测量身边的矩形（如书本,课桌,铅笔盒等）的四条边长度、四个角度数和对角线的长度及夹角度数,并记录测量结果.

（实物）



（形象图）

测量 物体	AB	AD	AC	BD	$\angle BAD$	$\angle ADC$	$\angle AOD$	$\angle AOB$
橡皮擦								
课本								
桌子								

（2）根据测量的结果，你有什么猜想？

你能证明吗？

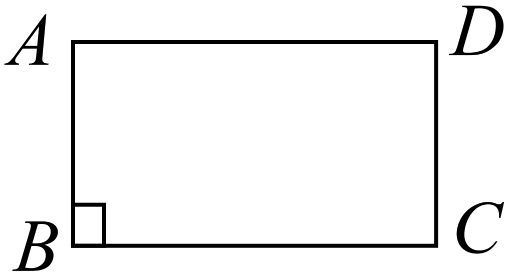
猜想1　矩形的四个角都是直角.

猜想2　矩形的对角线相等.

证一证

如图,四边形$ABCD$是矩形,$\angle B=90^{\circ}$.

求证：$\angle B=\angle C=\angle D=\angle A=90^{\circ}$.



证明：∵四边形$ABCD$是矩形,

∴$\angle B=\angle D$, $\angle C=\angle A$, $AB \parallel DC$.

∴$\angle B+\angle C=180^{\circ}$.

又∵$\angle B=90^{\circ}$,

∴$\angle C=90^{\circ}$.

∴$\angle B=\angle C=\angle D=\angle A=90^{\circ}$.

如图,四边形$ABCD$是矩形,$\angle ABC=90°$,对角线AC与DB相交于点O.

求证:$AC=DB$.

证明:$\because$四边形$ABCD$是矩形,

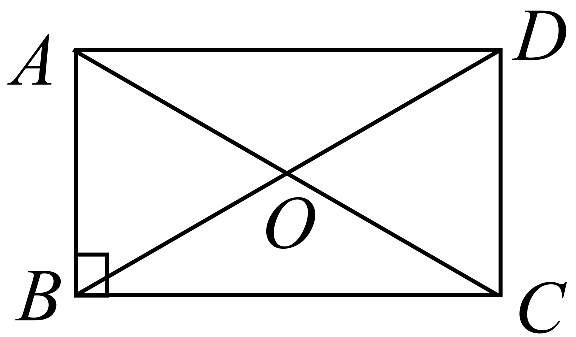
$\therefore AB=DC,\angle ABC=\angle DCB=90°$,

在$\triangle ABC$和$\triangle DCB$中,

$\because AB=DC,\ \angle ABC=\angle DCB,\ BC=CB$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$.

$\therefore AC=DB$.



归纳总结

矩形除了具有平行四边形所有性质，还具有的性质有：

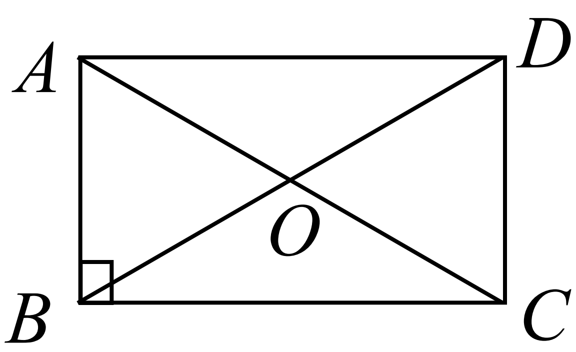
矩形的四个角都是直角.

矩形的对角线相等.

几何语言描述：

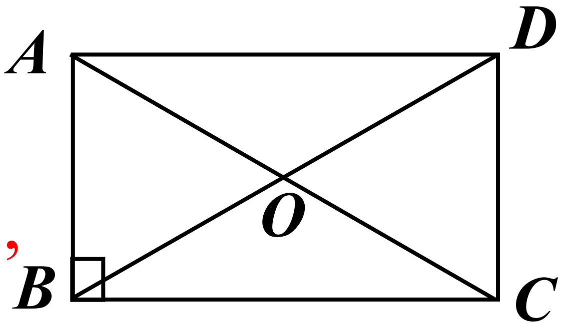
在矩形$ABCD$中，对角线AC与DB相交于点O.

$\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90°$，$AC=DB$.



典例精析

例1　如图,在矩形$ABCD$中,两条对角线AC,BD相交于点O,$\angle AOB=60°$,$AB=4$,求矩形对角线的长.



解：∵四边形$ABCD$是矩形.

∴$AC = BD$,

$OA= OC= \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD$,

∴$OA = OB$。

又∵$\angle AOB=60°$,

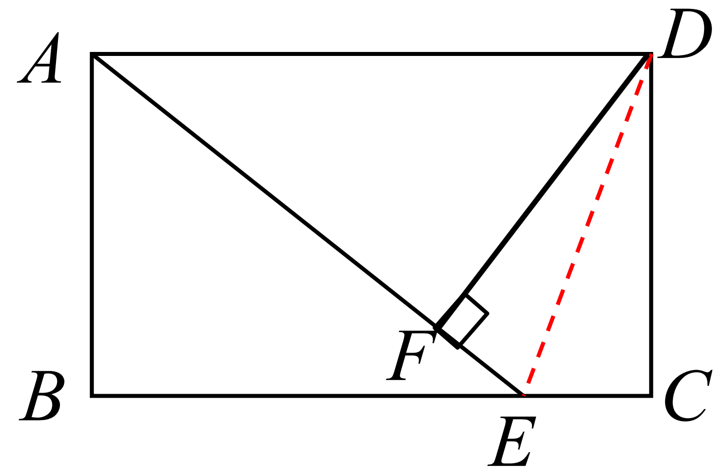
∴$\triangle OAB$是等边三角形,

∴$OA=AB=4$,

∴$AC=BD=2OA=8$.

矩形的对角线相等且互相平分

例2 如图,在矩形$ABCD$中,E是BC上一点,$AE=AD$,$DF\perp AE$,垂足为F.求证：$DF=DC$.



证明：连接DE.

$\because AD=AE$,$\therefore \angle AED=\angle ADE$.

$\because$四边形$ABCD$是矩形,

$\therefore AD\parallel BC$,$\angle C=90^\circ$.

$\therefore \angle ADE=\angle DEC$,

$\therefore \angle DEC=\angle AED$.

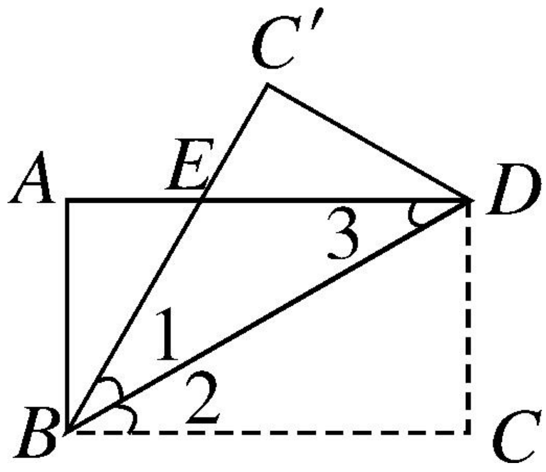
又$\because DF\perp AE$,$\therefore \angle DFE=\angle C=90^\circ$.

又$\because DE=DE$,

$\therefore \triangle DFE\cong\triangle DCE$,

$\therefore DF=DC$.

例3 如图，将矩形$ABCD$沿着直线BD折叠，使点C落在C'处，BC'交AD于点E，$AD=8$，$AB=4$，求$\triangle BED$的面积.



解：∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$AD\parallel BC$，$\angle A=90°$，

∴$\angle 2=\angle 3$.

又由折叠知$\angle 1=\angle 2$，

∴$\angle 1=\angle 3$，∴$BE=DE$.

设$BE=DE=x$，则$AE=8-x$.

∵在$Rt\triangle ABE$中，$AB^2+AE^2=BE^2$，

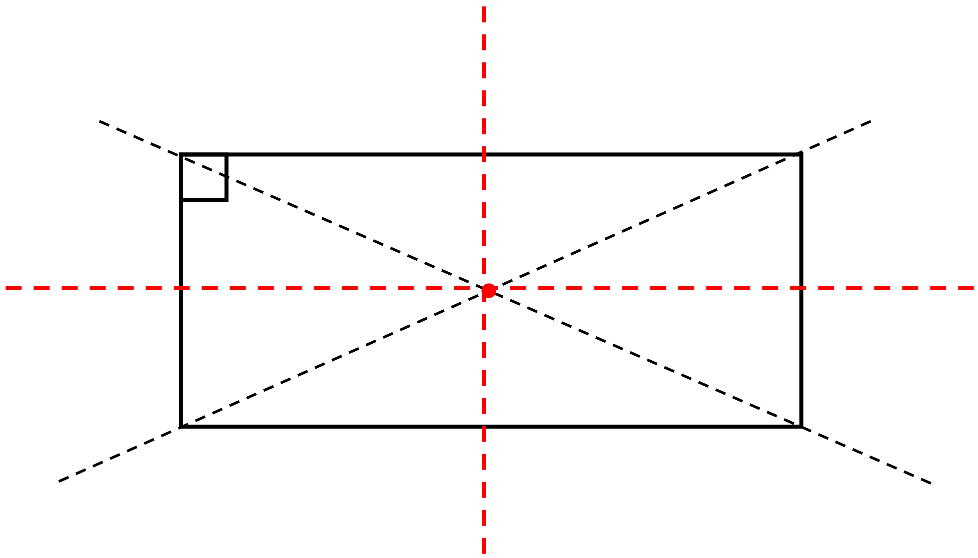
∴$4^2+(8-x)^2=x^2$，

解得$x=5$，即$DE=5$.

∴$S_{\triangle BED}=\frac{1}{2}DE\cdot AB=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$.

矩形的折叠问题常与勾股定理结合考查

思考　请同学们拿出准备好的矩形纸片,折一折,观察并思考. 矩形是不是轴对称图形?如果是,那么对称轴有几条?



矩形的性质:

对称性:　轴对称图形.

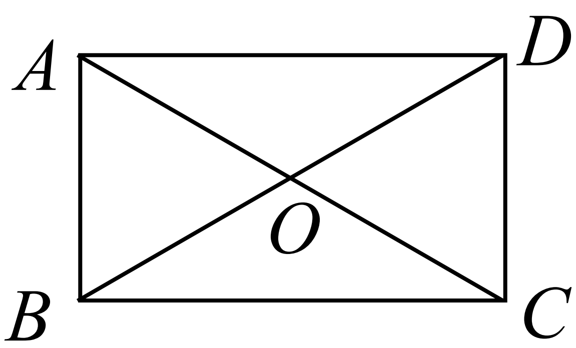
对称轴:　2条.

练一练

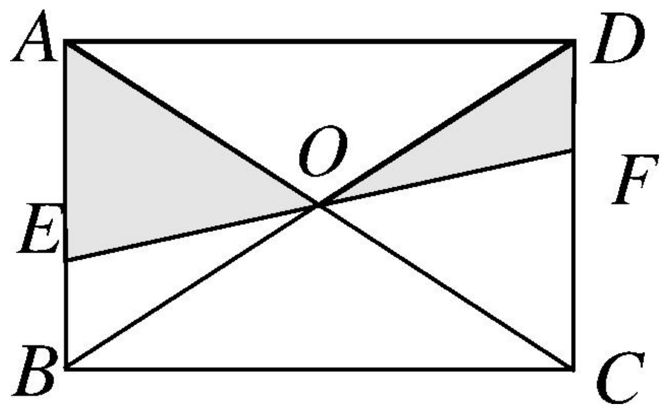
1.如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC，BD交于点O，下列说法错误的是（ C ）

A．$AB \parallel DC$　　B．$AC=BD$

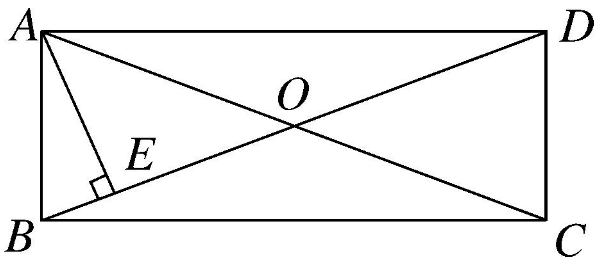
C．$AC \perp BD$　　D．$OA=OB$



2.如图，EF过矩形$ABCD$对角线的交点O，且分别交AB、CD于E、F，那么阴影部分的面积是矩形$ABCD$面积的____$\frac{1}{4}$____.



3.如图，在矩形$ABCD$中，$AE\perp BD$于E，$\angle DAE$：$\angle BAE=3$：1，求$\angle BAE$和$\angle EAO$的度数.



解：∵四边形$ABCD$是矩形，

∴$\angle DAB=90°$，

$AO=\frac{1}{2}AC$，$BO=\frac{1}{2}BD$，$AC=BD$，

∴$\angle BAE+\angle DAE=90°$，$AO=BO$.

又∵$\angle DAE$：$\angle BAE=3$：1，

∴$\angle BAE=22.5°$，$\angle DAE=67.5°$.

∵$AE\perp BD$，

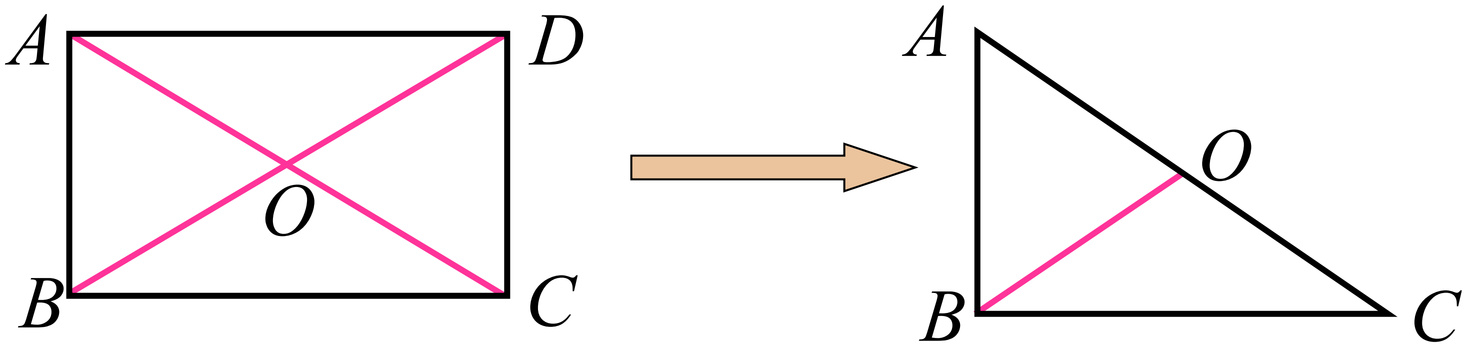
∴$\angle ABE=90°-\angle BAE=90°-22.5°=67.5°$，

∴$\angle OAB=\angle ABE=67.5°$，

∴$\angle EAO=67.5°-22.5°=45°$.

直角三角形斜边上的中线的性质

活动：如图，一张矩形纸片，画出两条对角线，沿着对角线AC剪去一半.



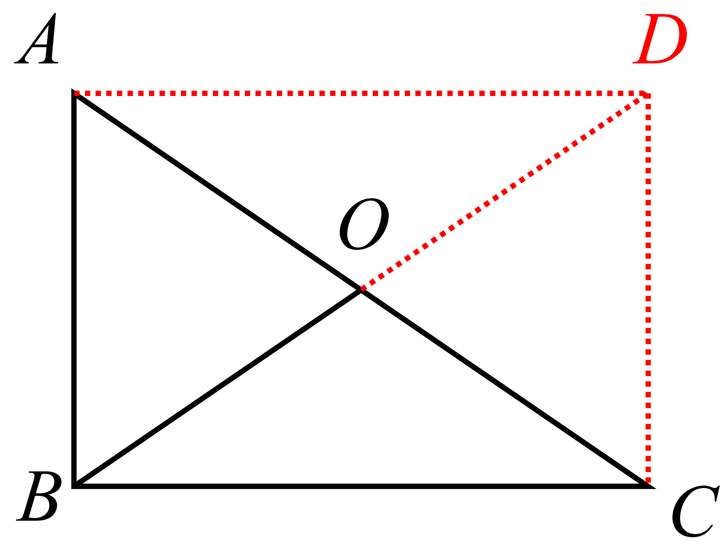
问题　Rt△ABC中，BO是一条怎样的线段？它的长度与斜边AC有什么关系？

试给出数学证明.

猜想：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

证一证

如图，在Rt△ABC中，∠ABC=90°，BO是AC上的中线.求证：$BO=\frac{1}{2}AC$？



证明：延长BO至D，使OD=BO，

连接AD、DC.

∵AO=OC，BO=OD，

∴四边形$ABCD$是平行四边形.

∵∠ABC=90°，∴平行四边形$ABCD$是矩形，

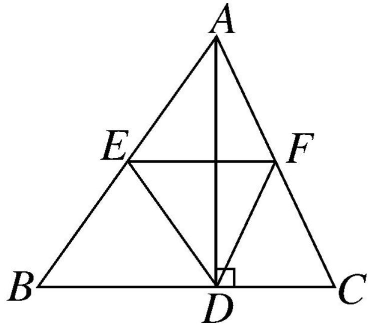
∴AC=BD，∴$BO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC$.

性质 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

典例精析

例4 如图，在△ABC中，AD是高，E、F分别是AB、AC的中点.

(1)若$AB=10$，$AC=8$，求四边形$AEDF$的周长；



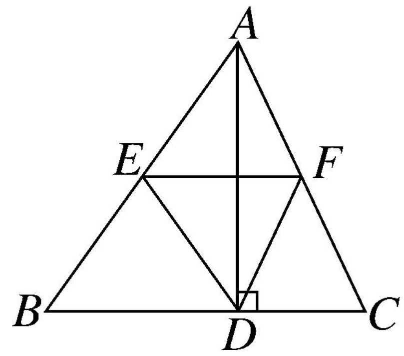
解：∵AD是△ABC的高，E、F分别是AB、AC的中点，

∴$DE=AE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times10=5$，

$DF=AF=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times8=4$，

∴四边形$AEDF$的周长$=AE+DE+DF+AF=5+5+4+4=18$；

(2)求证：EF垂直平分AD.



证明：∵$DE=AE$，$DF=AF$，

∴E、F在线段AD的垂直平分线上，

∴EF垂直平分AD.

归纳　当已知条件含有线段的中点、直角三角形的条件时，可联想直角三角形斜边上的中线的性质进行求解.

例5 如图，已知BD，CE是$\triangle ABC$不同边上的高，点G，F分别是BC，DE的中点，试说明$GF \perp DE$.

解：连接EG，DG.

$\because BD$，CE是$\triangle ABC$的高，

$\therefore \angle BDC = \angle BEC = 90°$.

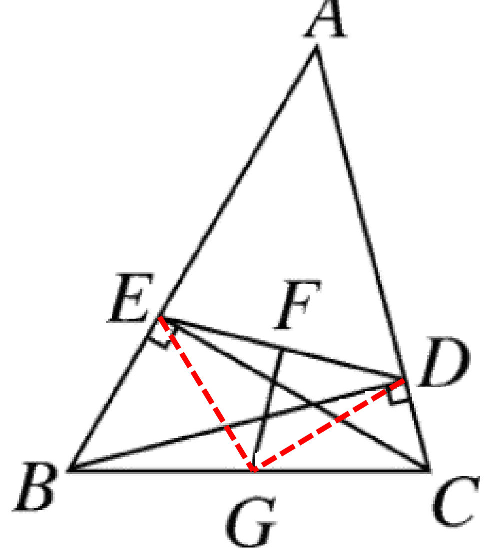
$\because$点G是BC的中点，

$\therefore EG = \frac{1}{2}BC$，$DG = \frac{1}{2}BC$.

$\therefore EG = DG$.

又$\because$点F是DE的中点，

$\therefore GF \perp DE$.



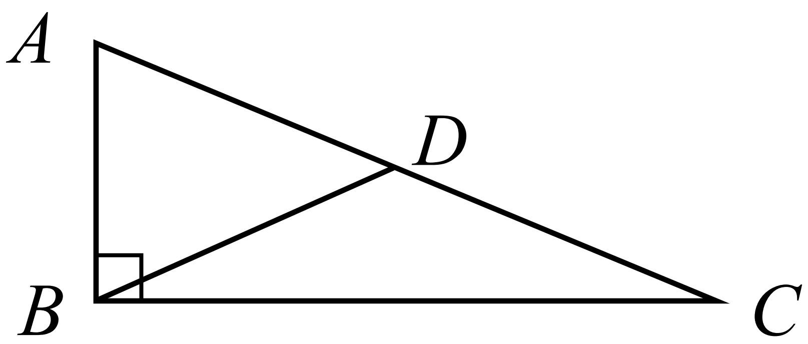
归纳 在直角三角形中，遇到斜边中点常作斜边中线，进而可将问题转化为等腰三角形的问题，然后利用等腰三角形“三线合一”的性质解题.

练一练

如图，在△ABC中,$\angle ABC=90°$,BD是斜边AC上的中线.

(1)若BD=3cm,则$AC=$___6___cm;

(2)若$\angle C=30°$,$AB=5$cm,则$AC=$___10___cm, $BD=$___5___cm.



1.矩形具有而一般平行四边形不具有的性质是（ A ）

A.对角线相等　B.对边相等

C.对角相等　D.对角线互相平分

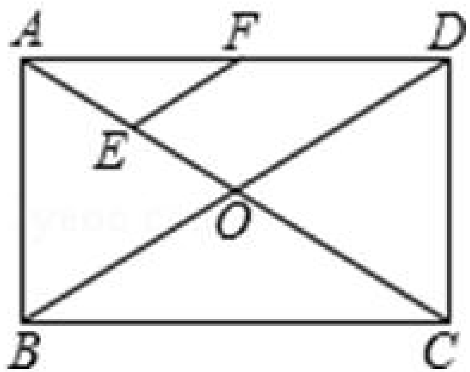
2.若直角三角形的两条直角边分别5和12,则斜边上的中线长为（ C ）

A.13　B.6　C.6.5　D.不能确定

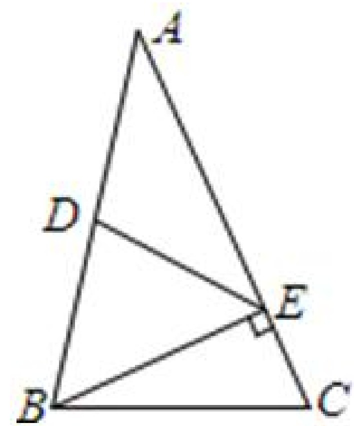
3.若矩形的一条对角线与一边的夹角为40°,则两条对角线相交的锐角是（ C ）

A.20°　B.40°　C.80°　D.10°

4.如图，在矩形$ABCD$中，对角线AC、BD相交于点O，点E、F分别是AO、AD的中点，若AB=6cm，BC=8cm，则EF=__2.5__cm.



第4题图



第5题图

5.如图，△ABC中，E在AC上，且$BE\perp AC$．D为AB中点，若DE=5，AE=8，则BE的长为__6__.

6.如图,四边形$ABCD$是矩形,对角线AC,BD相交于点O,$BE\parallel AC$交DC的延长线于点E.

（1）求证：$BD=BE$,

（2）若$\angle DBC=30°$, $BO=4$,求四边形$ABED$的面积.

(1)证明：∵四边形$ABCD$是矩形,

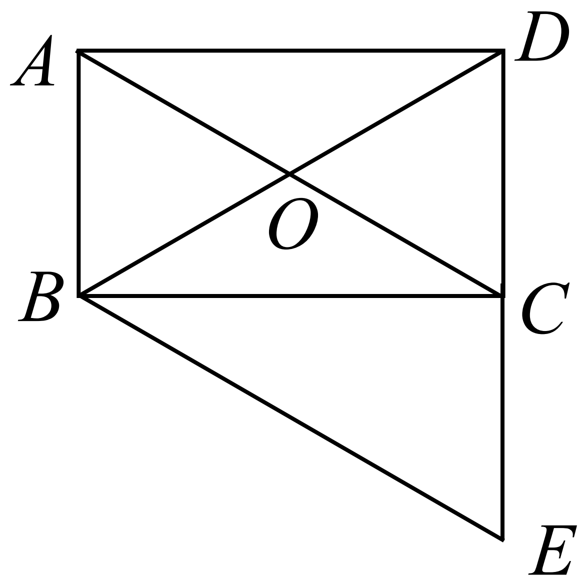
∴$AC= BD$,$AB\parallel CD$.

又∵$BE\parallel AC$,

∴四边形$ABEC$是平行四边形,

∴$AC=BE$,

∴$BD=BE$.



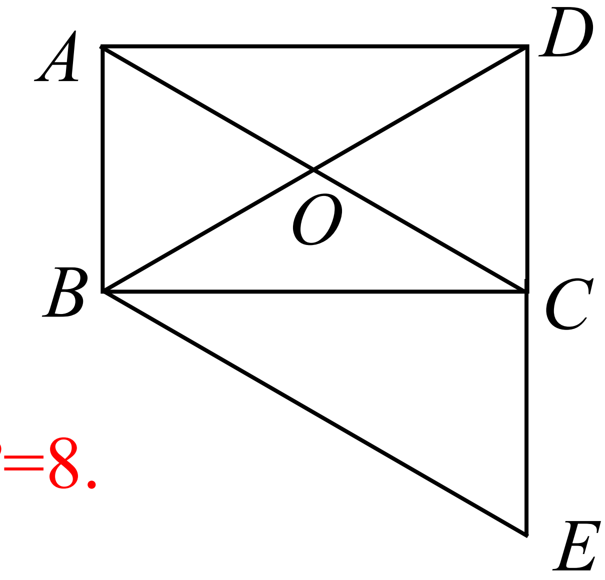
(2)解：$\because$在矩形$ABCD$中，$BO=4$，

$\therefore BD=2BO=2\times4=8$.

$\because \angle DBC=30°$，

$\therefore CD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times8=4$，

$\therefore AB=CD=4$，$DE=CD+CE=CD+AB=8$.



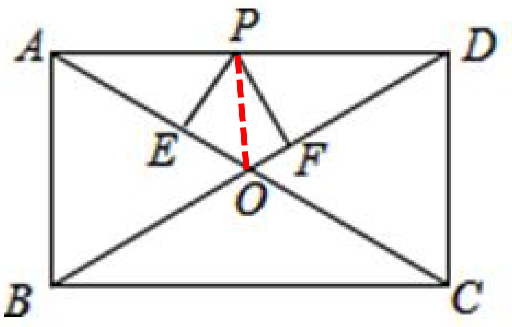
在Rt△BCD中，

$BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

$\therefore$四边形$ABED$的面积$=\frac{1}{2}\times(4+8)\times4\sqrt{3}=24\sqrt{3}$.

能力提升：

7.如图，在矩形$ABCD$中，$AB=6$，$AD=8$，P是AD上的动点，$PE\perp AC$，$PF\perp BD$于F，求$PE+PF$的值.



解：连接OP.

$\because$四边形$ABCD$是矩形，

$\therefore\angle DAB=90°$，$OA=OD=OC=OB$，

$\therefore S_{\triangle AOD}=S_{\triangle DOC}=S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}$

$=\frac{1}{4}S_{矩形ABCD}=\frac{1}{4}\times6\times8=12.$

在Rt$\triangle BAD$中，由勾股定理得$BD=10$，

$\therefore AO=OD=5$，

$\because S_{\triangle APO}+S_{\triangle DPO}=S_{\triangle AOD}$，

$\therefore\frac{1}{2}AO\cdot PE+\frac{1}{2}DO\cdot PF=12$，即$5PE+5PF=24$，

$\therefore PE+PF=\frac{24}{5}$.

矩形的相关概念及性质

- 有一个角是直角的平行四边形叫做矩形
- 具有平行四边行的一切性质
- 四个内角都是直角，两条对角线互相平分且相等
- 轴对称图形 → 有两条对称轴
- 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半

见《学练优》本课时练习