第十八章 平行四边形

18.2.3 正方形

第1课时 正方形的性质

导入新课 讲授新课 当堂练习 课堂小结

学习目标

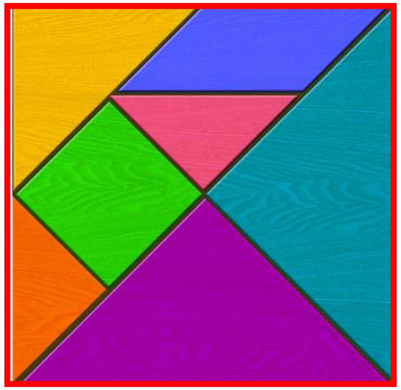
1.理解正方形的概念.

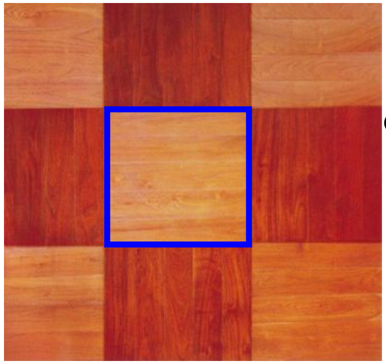
2.探索并证明正方形的性质，并了解平行四边形、矩形、菱形之间的联系和区别.(重点、难点)

3.会应用正方形的性质解决相关证明及计算问题.（难点）

情景引入

观察下面图形，正方形是我们熟悉的几何图形，在生活中无处不在.



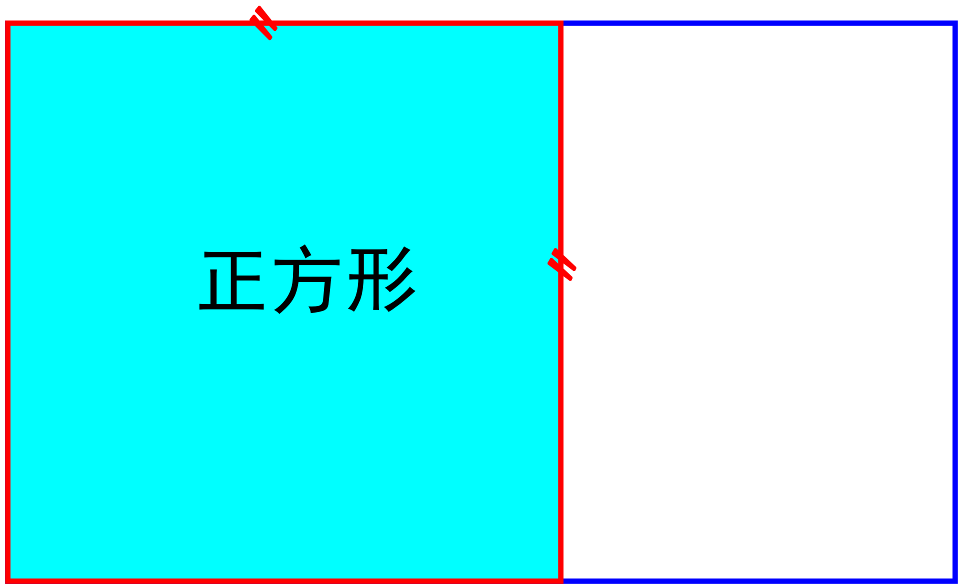


你还能举出其他的例子吗？

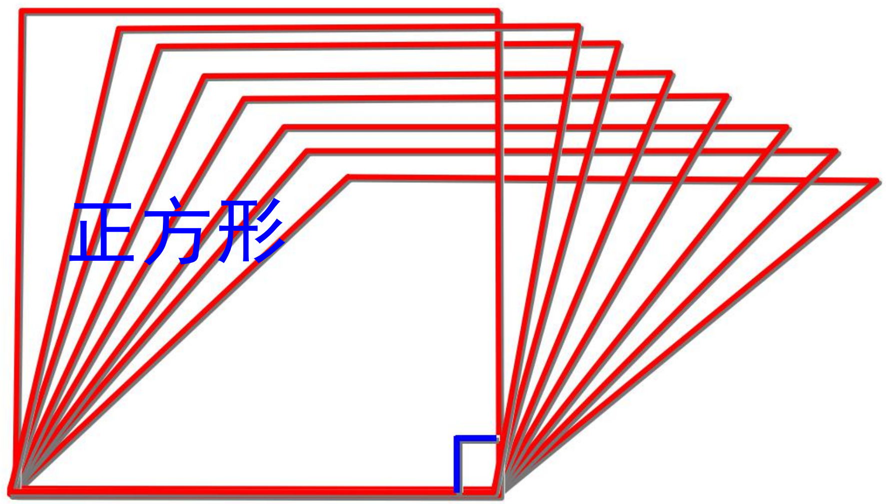
正方形的性质

问题引入

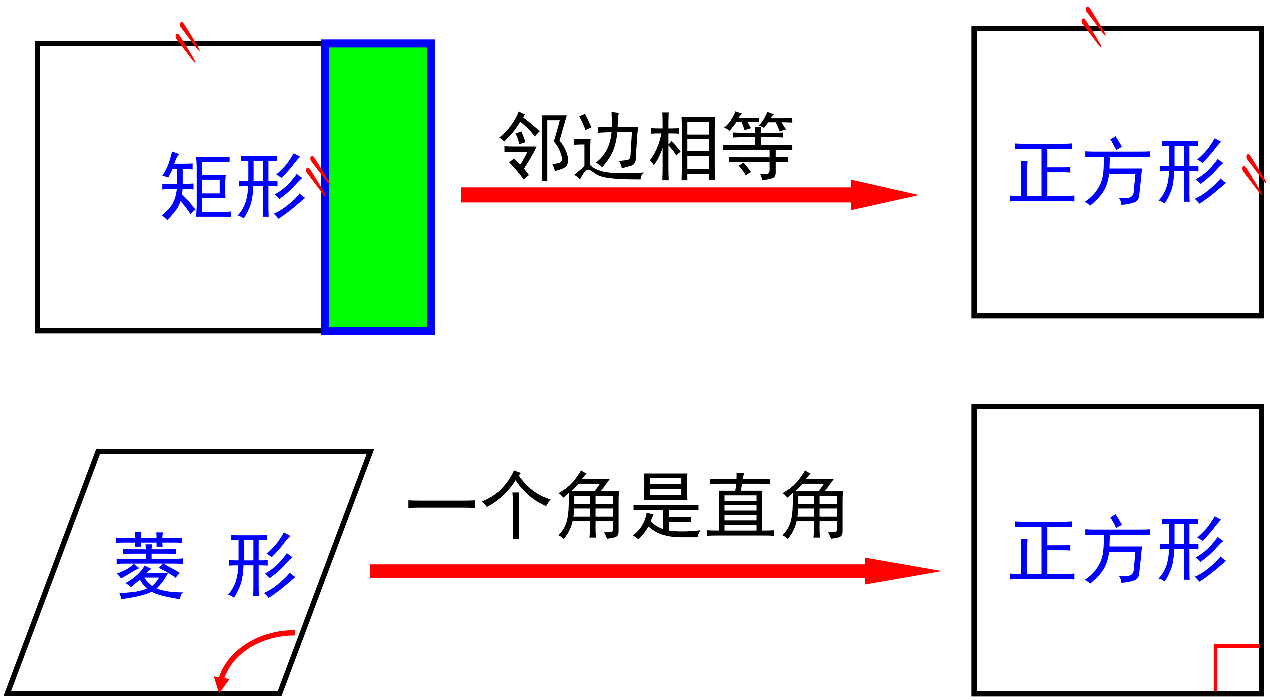
问题1：矩形怎样变化后就成了正方形呢?你有什么发现？



问题2　菱形怎样变化后就成了正方形呢?你有什么发现?



归纳总结



正方形定义:

有一组邻边相等并且有一个角是直角的平行四边形叫正方形.

证一证

已知：如图，四边形$ABCD$是正方形.

求证：正方形$ABCD$四边相等，四个角都是直角.

证明：∵四边形$ABCD$是正方形.

∴$\angle A=90°$，$AB=AC$（正方形的定义）.

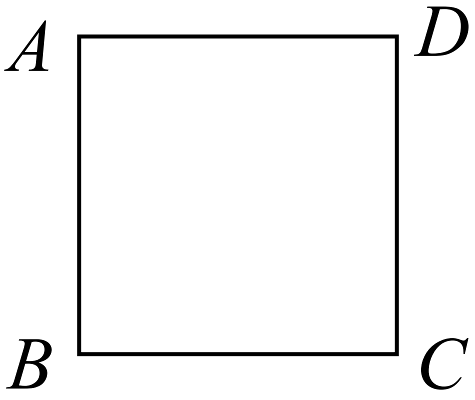
又∵正方形是平行四边形.

∴正方形是矩形（矩形的定义），

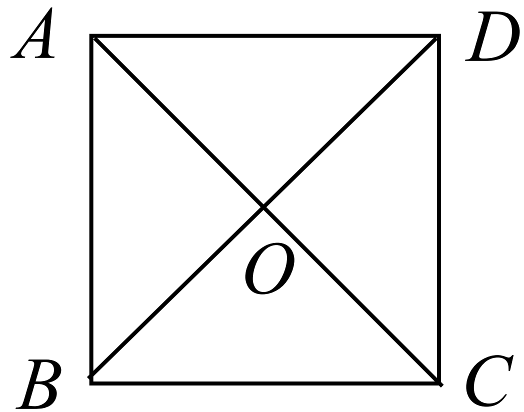
正方形是菱形（菱形的定义）.

∴$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$，

$AB=BC=CD=AD$.



已知：如图，四边形$ABCD$是正方形.对角线AC、BD相交于点O.求证：$AO=BO=CO=DO$，$AC\perp BD$.



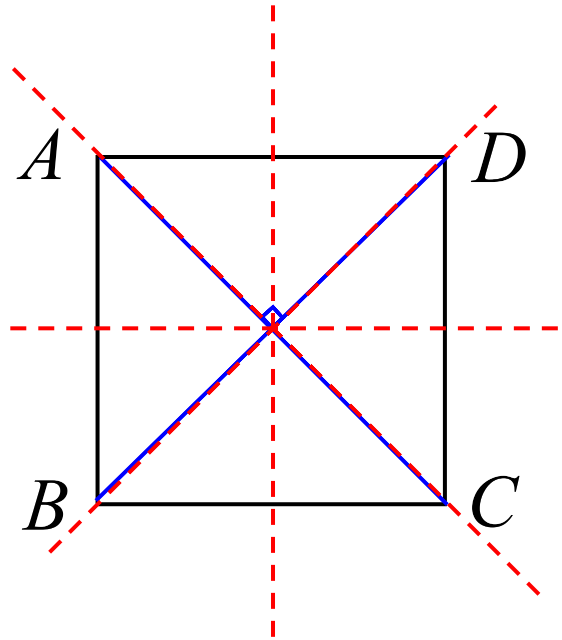
证明：∵正方形$ABCD$是矩形，

∴$AO=BO=CO=DO$.

∵正方形$ABCD$是菱形.

∴$AC\perp BD$.

思考　请同学们拿出准备好的正方形纸片,折一折,观察并思考．正方形是不是轴对称图形?如果是,那么对称轴有几条?

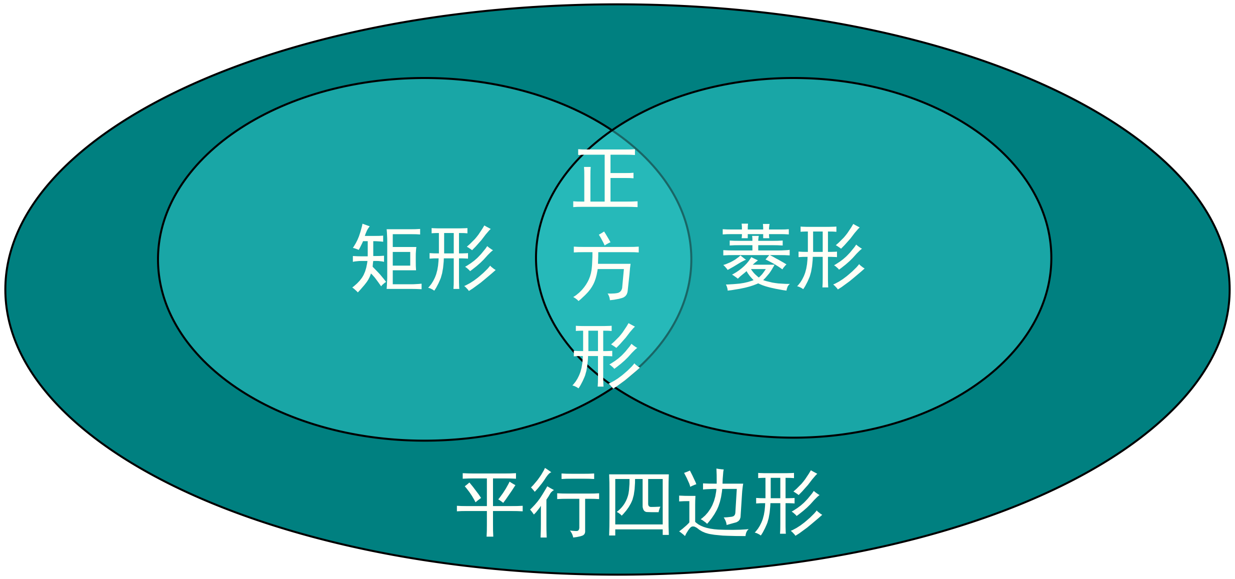


对称性：<u>轴对称图形</u>．

对称轴：<u>4条</u>．

归纳总结

平行四边形、矩形、菱形、正方形之间关系：



正方形是特殊的平行四边形,也是特殊的矩形,也是特殊的菱形.所以矩形、菱形有的性质,正方形都有.

性质：1.正方形的四个角都是直角,四条边相等.

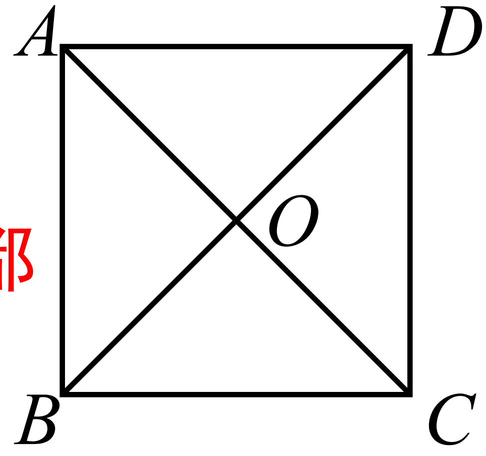
2.正方形的对角线相等且互相垂直平分.

典例精析

例1 求证: 正方形的两条对角线把这个正方形分成四个全等的等腰直角三角形.

已知: 如图,四边形$ABCD$是正方形,对角线AC、BD相交于点O.

求证: $\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle DAO$是全等的等腰直角三角形.



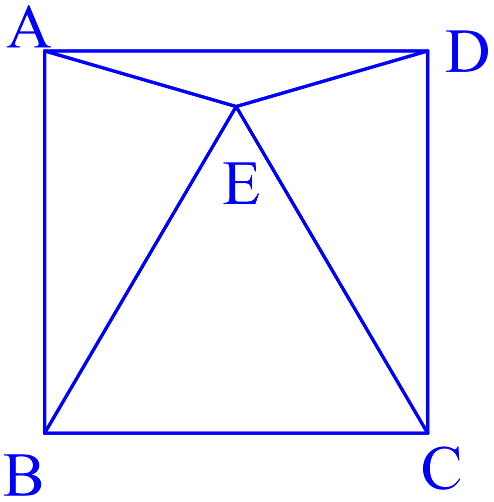
证明: ∵ 四边形$ABCD$是正方形,

∴ $AC=BD, AC\perp BD, AO=BO=CO=DO$.

∴ $\triangle ABO$、$\triangle BCO$、$\triangle CDO$、$\triangle DAO$都是等腰直角三角形,并且

$\triangle ABO \cong \triangle BCO \cong \triangle CDO \cong \triangle DAO$.

例2 如图，在正方形$ABCD$中，ΔBEC是等边三角形，求证：$\angle EAD=\angle EDA=15^\circ$.



证明：∵ ΔBEC是等边三角形，

∴$BE=CE=BC, \angle EBC=\angle ECB=60^\circ$，

∵ 四边形$ABCD$是正方形，

∴$AB=BC=CD, \angle ABC=\angle DCB=90^\circ$，

∴$AB=BE=CE=CD$，$\angle ABE=\angle DCE=30^\circ$，

∴$\triangle ABE$，$\triangle DCE$是等腰三角形，

∴$\angle BAE=\angle BEA=\angle CDE=\angle CED=75^\circ$，

∴$\angle EAD=\angle EDA=90^\circ-75^\circ=15^\circ$.

【变式题1】四边形$ABCD$是正方形，以正方形$ABCD$的一边作等边$\triangle ADE$，求$\angle BEC$的大小.

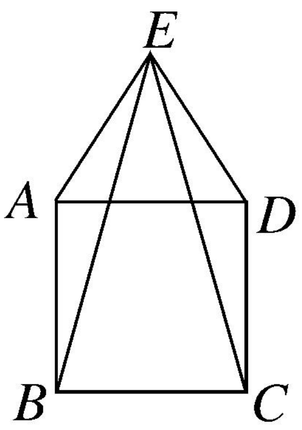
解：当等边$\triangle ADE$在正方形$ABCD$外部时，如图①，

$AB=AE$，$\angle BAE=90°+60°=150°$.

$\therefore \angle AEB=15°$.

同理可得$\angle DEC=15°$.

$\therefore \angle BEC=60°-15°-15°=30°$；

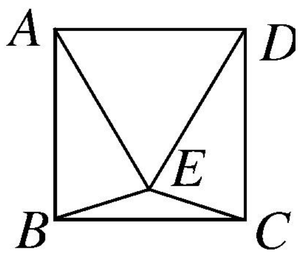


图①

当等边$\triangle ADE$在正方形$ABCD$内部时，如图②，

$AB=AE$，$\angle BAE=90°-60°=30°$，

$\therefore \angle AEB=75°$．



图②

同理可得$\angle DEC=75°$．

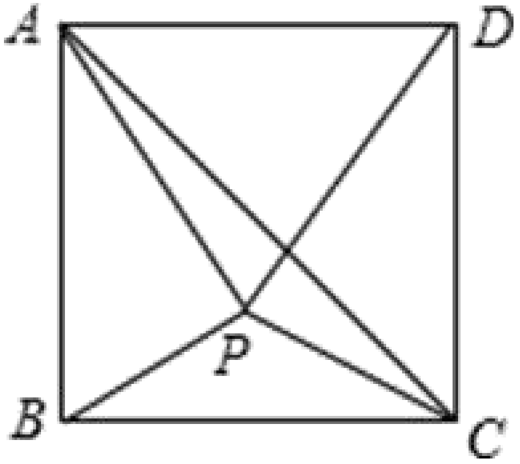
$\therefore \angle BEC=360°-75°-75°-60°=150°$．

综上所述，$\angle BEC$的大小为30°或150°．

易错提醒：因为等边$\triangle ADE$与正方形$ABCD$有一条公共边，所以边相等．本题分两种情况：等边$\triangle ADE$在正方形的外部或在正方形的内部．

【变式题2】 如图，在正方形$ABCD$内有一点P满足$AP=AB$，$PB=PC$，连接AC、PD.

（1）求证：$\triangle APB\cong\triangle DPC$；



解：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle ABC=\angle DCB=90°$.

∵$PB=PC$，

∴$\angle PBC=\angle PCB$.

∴$\angle ABC-\angle PBC=\angle DCB-\angle PCB$，

即$\angle ABP=\angle DCP$.

又∵$AB=DC$，$PB=PC$，

∴$\triangle APB\cong\triangle DPC$.

（2）求证：$\angle BAP=2\angle PAC$.

证明：∵四边形$ABCD$是正方形，

∴$\angle BAC=\angle DAC=45°$．

∵$\triangle APB\cong\triangle DPC$，

∴$AP=DP$.

又∵$AP=AB=AD$，

∴$DP=AP=AD$.

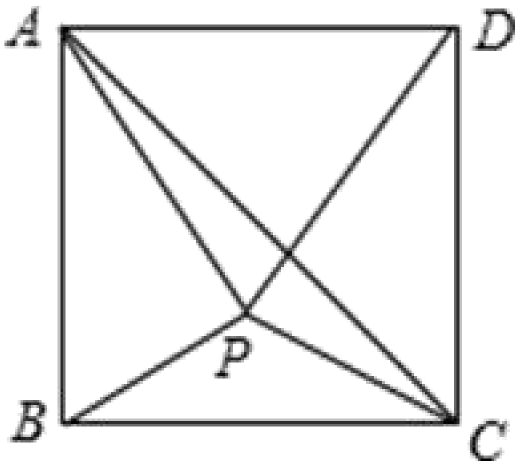
∴$\triangle APD$是等边三角形.

∴$\angle DAP=60°$．

∴$\angle PAC=\angle DAP-\angle DAC=15°$．

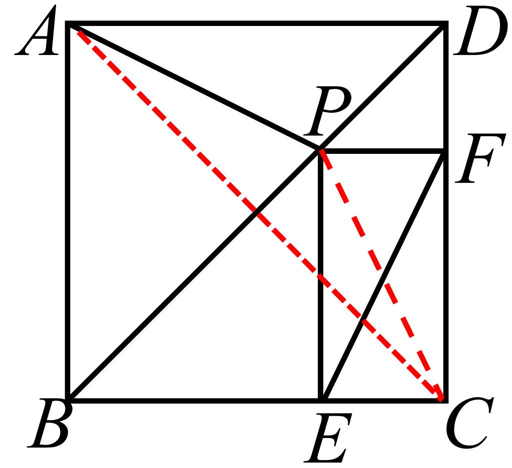
∴$\angle BAP=\angle BAC-\angle PAC=30°$．

∴$\angle BAP=2\angle PAC$.



例3 如图，在正方形$ABCD$中，P为BD上一点，PE⊥BC于E，$PF\perp DC$于F.试说明：$AP=EF$.

解: 连接PC，AC.



∵四边形$ABCD$是正方形,

∴$\angle FCE=90^\circ$，AC垂直平分BD,

∴$AP=PC$.

又∵$PE\perp BC$，$PF\perp DC$,

∴四边形$PECF$是矩形,

∴$PC=EF$.

∴$AP=EF$.

归纳 在正方形的条件下证明两条线段相等：通常连接对角线构造垂直平分的模型，利用垂直平分线性质，角平分线性质，等腰三角形等来说明.

练一练

1.正方形具有而矩形不一定具有的性质是 （ B ）

A.四个角相等

B.对角线互相垂直平分

C.对角互补

D.对角线相等

2.正方形具有而菱形不一定具有的性质（ D ）

A.四条边相等

B.对角线互相垂直平分

C.对角线平分一组对角

D.对角线相等

3.如图，四边形$ABCD$是正方形，对角线AC与BD相交于点O，$AO=2$，求正方形的周长与面积.

解：∵四边形$ABCD$是正方形，

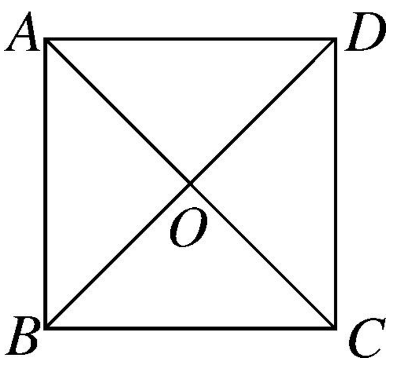
∴$AC\perp BD$，$OA=OD=2$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOD$中，由勾股定理，得

$AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=2\sqrt{2}$,

∴正方形的周长为$4AD=8\sqrt{2}$，

面积为$AD^2=8$.



1.平行四边形、矩形、菱形、正方形都具有的是（ A ）

A．对角线互相平分

B．对角线互相垂直

C．对角线相等

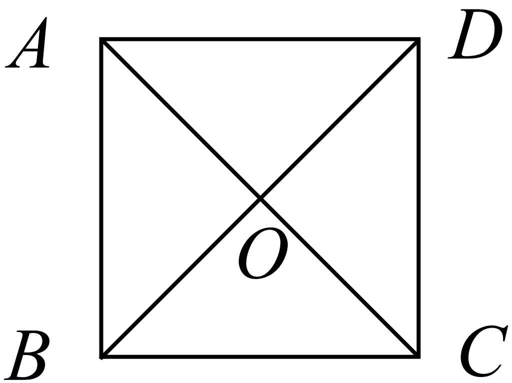
D．对角线互相垂直且相等

2.一个正方形的对角线长为2cm，则它的面积是

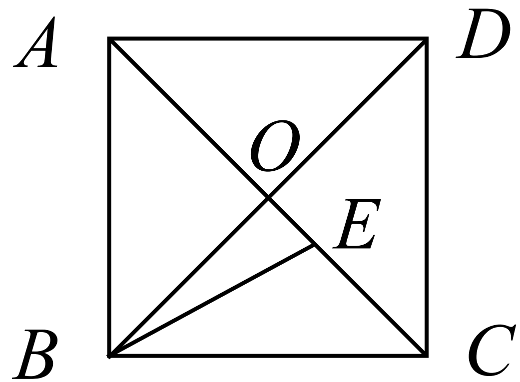
（ A ）

A.2cm² B.4cm² C.6cm² D.8cm²

3．在正方形ABC中，$\angle ADB=$__45°__，$\angle DAC=$__45°__，$\angle BOC=$__90°__.



第3题图



第4题图

4.在正方形$ABCD$中，E是对角线AC上一点，且$AE=AB$，则$\angle EBC$的度数是__22.5°__.

5.如图，正方形$ABCD$的边长为1cm，AC为对角线，AE平分$\angle BAC$，$EF\perp AC$，求BE的长.

解：∵四边形$ABCD$为正方形，

∴$\angle B=90^\circ$，$\angle ACB=45^\circ$，$AB=BC=1$cm.

∵$EF\perp AC$，∴$\angle EFA=\angle EFC=90^\circ$.

又∵$\angle ECF=45^\circ$，

∴$\triangle EFC$是等腰直角三角形，∴$EF=FC$.

∵$\angle BAE=\angle FAE$，$\angle B=\angle EFA=90^\circ$，$AE=AE$，

∴$\triangle ABE\cong\triangle AFE$，

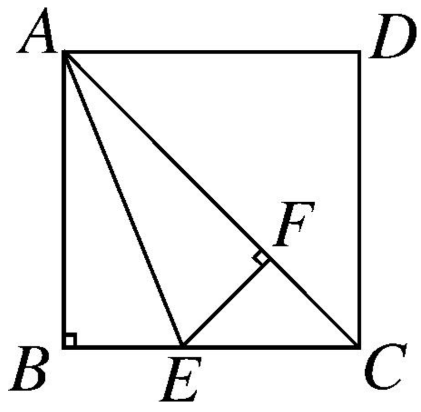
∴$AB=AF=1$cm，$BE=EF$.

∴$FC=BE$.

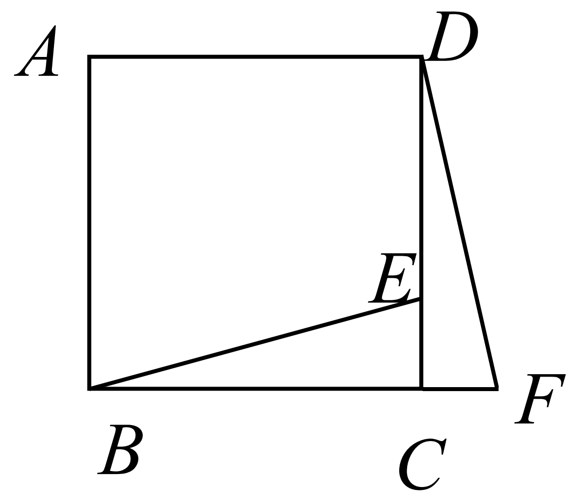
在Rt$\triangle ABC$中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$cm，

∴$FC=AC-AF=(\sqrt{2}-1)$cm，

∴$BE=(\sqrt{2}-1)$cm.



6. 如图在正方形$ABCD$中,E为CD上一点，F为BC边延长线上一点,且$CE=CF$. BE与DF之间有怎样的关系?请说明理由.



解：$BE=DF$,且$BE\perp DF$.理由如下：

$\because$四边形$ABCD$是正方形.

$\therefore BC=DC, \angle BCE=90°$.

$\therefore \angle DCF=180°-\angle BCE=90°$.

$\therefore \angle BCE=\angle DCF$.

又$\because CE=CF$.

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$.

$\therefore BE=DF$.

延长BE交DE于点M,

$\because \triangle BCE \cong \triangle DCF$,

$\therefore \angle CBE = \angle CDF$.

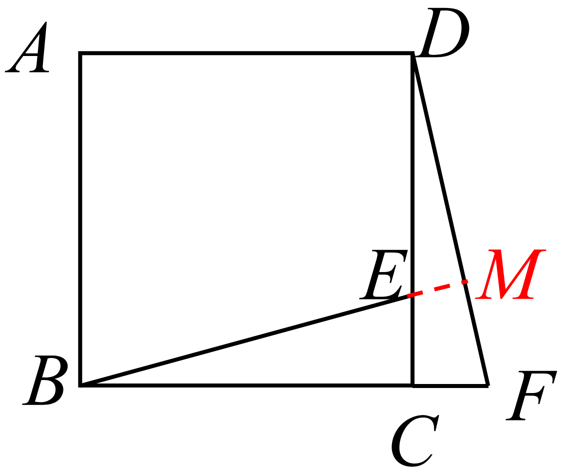
$\because \angle DCF = 90°$,

$\therefore \angle CDF + \angle F = 90°$,

$\therefore \angle CBE + \angle F = 90°$,

$\therefore \angle BMF = 90°$.

$\therefore BE \perp DF$.



正方形的性质

- 定义 ⇨ 有一组邻相等，并且有一个角是直角的平行四边形叫做正方形.
- 性质
  - 1.四个角都是直角
  - 2.四条边都相等
  - 3.对角线相等且互相垂直平分

见《学练优》本课时练习