优翼 课件

学练优八年级数学下（RJ）
教学课件

第十八章 平行四边形

18.2.3 正方形

第2课时 正方形的判定

导入新课　讲授新课　当堂练习　课堂小结

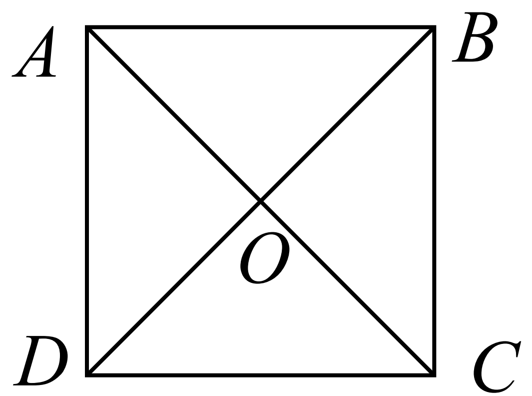
学习目标

1．探索并证明正方形的判定，并了解平行四边形、矩形、菱形之间的联系和区别；(重点、难点)

2．会运用正方形的判定条件进行有关的论证和计算．(难点)

复习引入

问题1 什么是正方形？正方形有哪些性质？

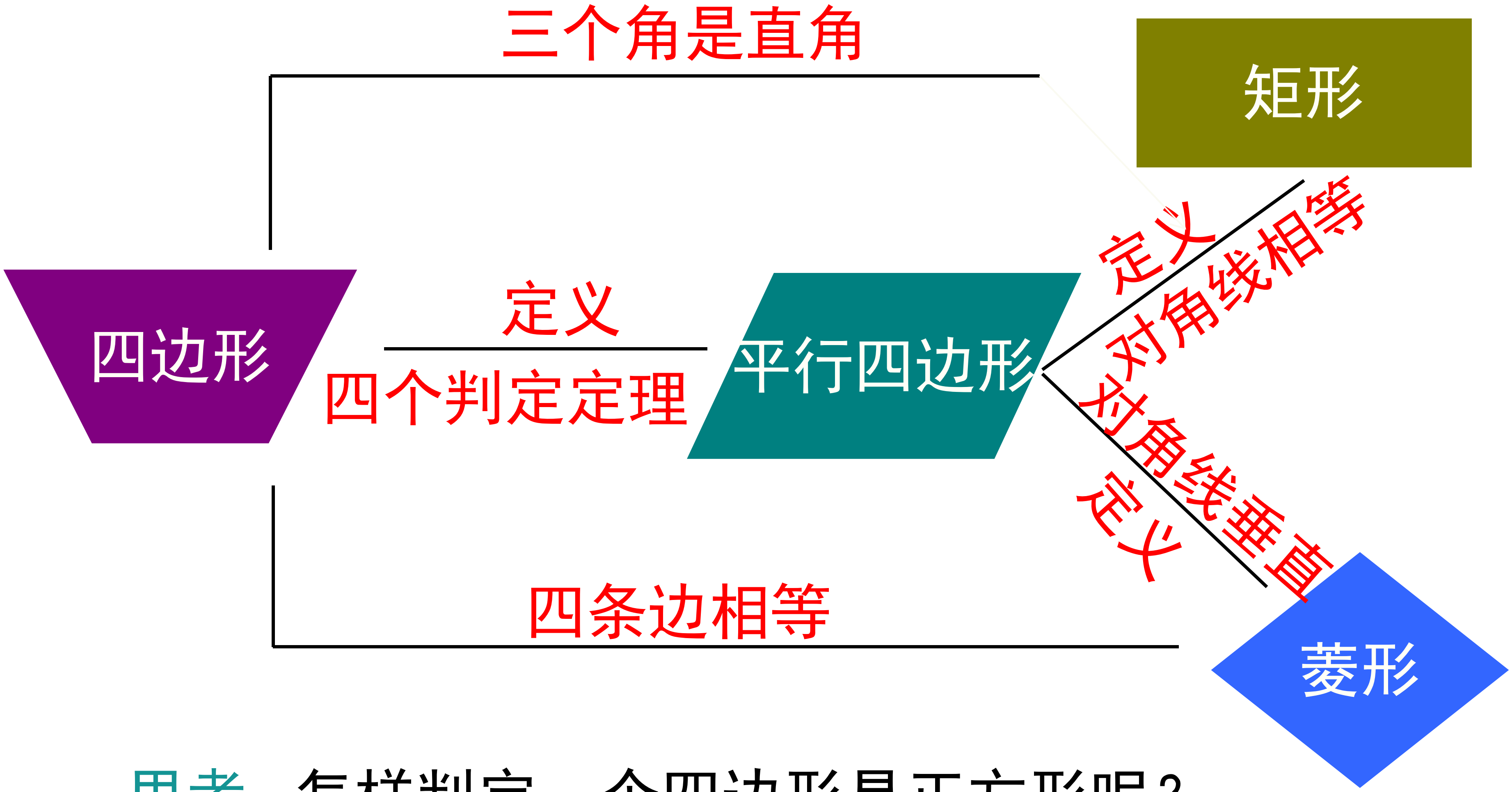


正方形：有一组邻边相等，并且有一个角是直角的平行四边形.

正方形性质：①四个角都是直角; ②四条边都相等;

③对角线相等且互相垂直平分.

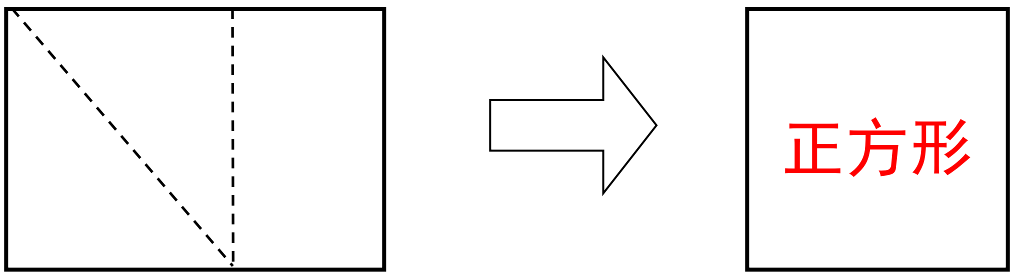
问题2　你是如何判断是矩形、菱形？



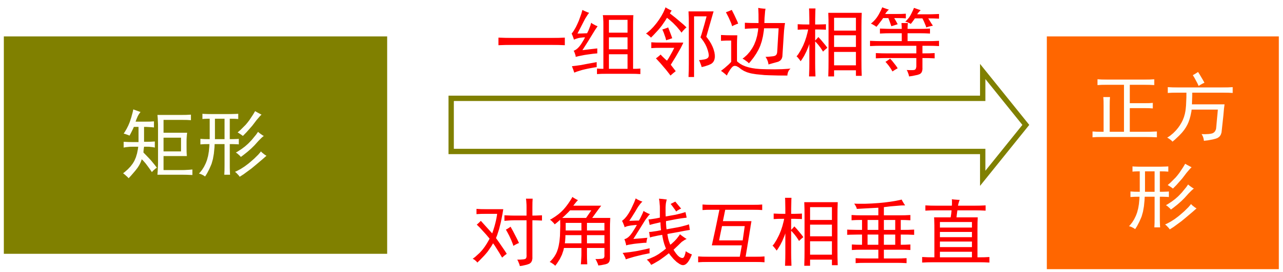
思考　怎样判定一个四边形是正方形呢？

正方形的判定

活动1　准备一张矩形的纸片，按照下图折叠,然后展开，折叠部分得到一个正方形，可量一量验证验证.



猜想　满足怎样条件的矩形是正方形？

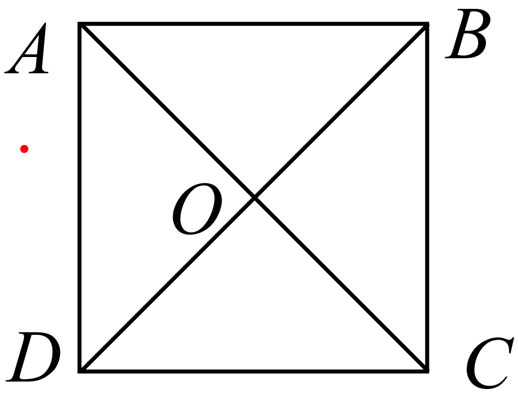


证一证

对角线互相垂直的矩形是正方形.

已知：如图, 在矩形$ABCD$中, AC，DB是它的两条对角线, $AC\perp DB$.

求证：四边形$ABCD$是正方形.



证明：∵四边形$ABCD$是矩形,

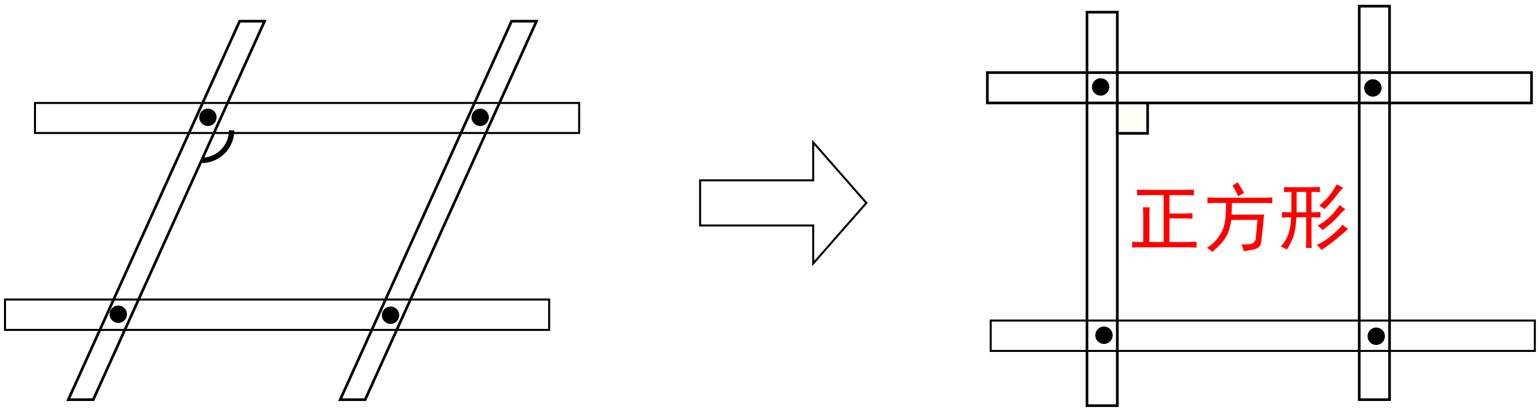
∴ $AO=CO=BO=DO$， $\angle ADC=90°$.

∵$AC\perp DB$,

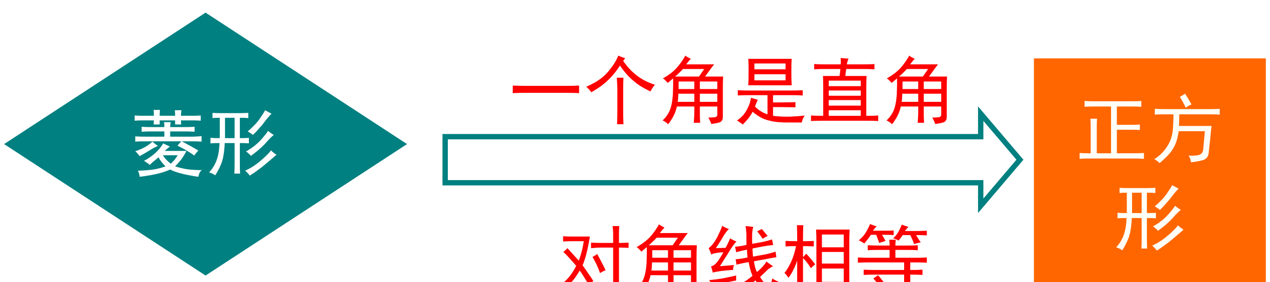
∴ $AD=AB=BC=CD$,

∴四边形$ABCD$是正方形.

活动2　把可以活动的菱形框架的一个角变为直角，观察这时菱形框架的形状.量量看是不是正方形.



猜想　　满足怎样条件的菱形是正方形？

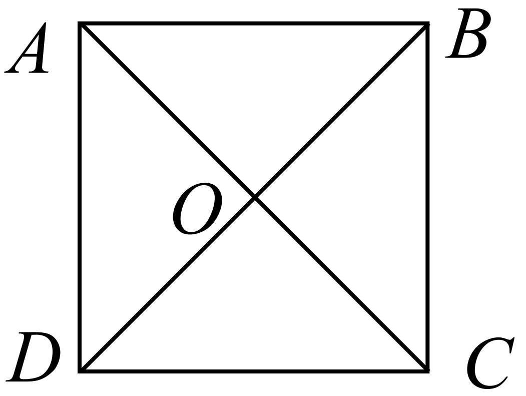


证一证

对角线相等的菱形是正方形.

已知：如图, 在菱形$ABCD$中, AC，DB是它的两条对角线, $AC=DB$.

求证：四边形$ABCD$是正方形.



证明：∵四边形$ABCD$是菱形,

∴$AB=BC=CD=AD$,$AC\perp DB$.

∵$AC=DB$,

∴ $AO=BO=CO=DO$,

∴$\triangle AOD$,$\triangle AOB$,$\triangle COD$,$\triangle BOC$是等腰直角三角形,

∴$\angle DAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle ADC=90°$,

∴四边形$ABCD$是正方形.

总结归纳

正方形判定的几条途径：

先判定菱形 + 一个直角，对角线相等 矩形条件(二选一) ⇒ 正方形

先判定矩形 + 一组邻边相等，对角线垂直 菱形条件(二选一) ⇒ 正方形

平行四边形 $\xrightarrow[\text{一内角是直角}]{\text{一组邻边相等}}$ 正方形

练一练

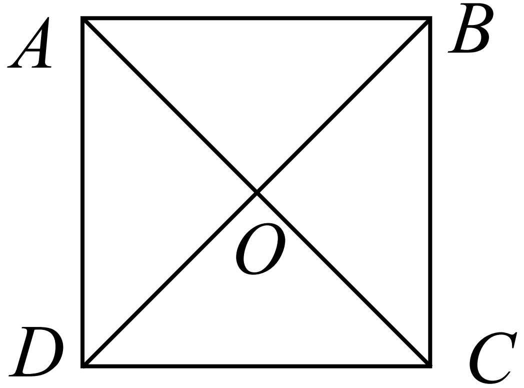
在四边形$ABCD$中，O是对角线的交点，能判定这个四边形是正方形的是（ C ）

A．$AC=BD$，$AB\parallel CD$，$AB=CD$

B．$AD\parallel BC$，$\angle A=\angle C$

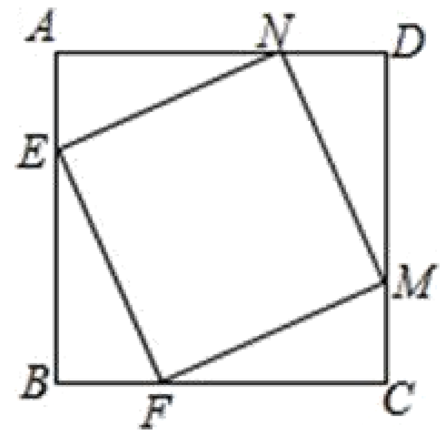
C．$AO=BO=CO=DO$，$AC\perp BD$

D．$AO=CO$，$BO=DO$，$AB=BC$



典例精析

例1 在正方形$ABCD$中，点E、F、M、N分别在各边上，且$AE=BF=CM=DN$．四边形$EFMN$是正方形吗?为什么?



分析：由已知可证$\triangle AEN \cong \triangle BFE \cong \triangle CMF \cong \triangle DNM$，得四边形$EFMN$是菱形，再证有一个角是直角即可.

证明：∵四边形$ABCD$是正方形，

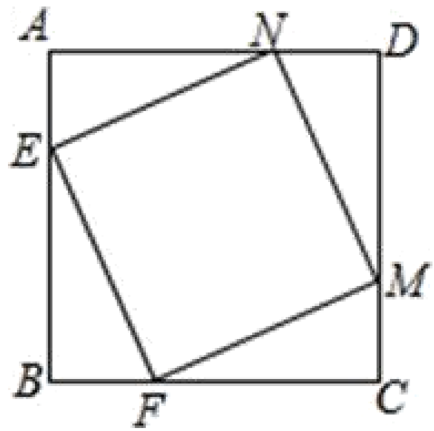
∴$AB=BC=CD=DA$，$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$．

∵$AE=BF=CM=DN$，

∴$AN=BE=CF=DM$.

在$\triangle AEN$、$\triangle BFE$、$\triangle CMF$、$\triangle DNM$中，

$$\begin{cases} AE=BF=CM=DN, \\ \angle A=\angle B=\angle C=\angle D, \\ AN=BE=CF=DM, \end{cases}$$



$\therefore \triangle AEN \cong \triangle BFE \cong \triangle CMF \cong \triangle DNM$,

$\therefore EN=FE=MF=NM$，$\angle ANE=\angle BEF$,

$\therefore$四边形$EFMN$是菱形，

$\angle NEF=180°-(\angle AEN+\angle BEF)$

$=180°-(\angle AEN+\angle ANE)$

$=180°-90°=90°$.

$\therefore$四边形$EFMN$是正方形.

例2 如图，在直角三角形中，$\angle C=90°$，$\angle A$、$\angle B$ 的平分线交于点D.$DE\perp AC$，$DF\perp AB$.求证:四边形$CEDF$为正方形.

证明：$\because DE\perp AC$，$DF\perp AB$，

$\therefore \angle DEC=\angle DFC=90°$.

又$\because \angle C=90°$，

$\therefore$四边形$ADFC$是矩形.

过点D作$DG\perp AB$，垂足为G.

$\because AD$是$\angle CAB$的平分线

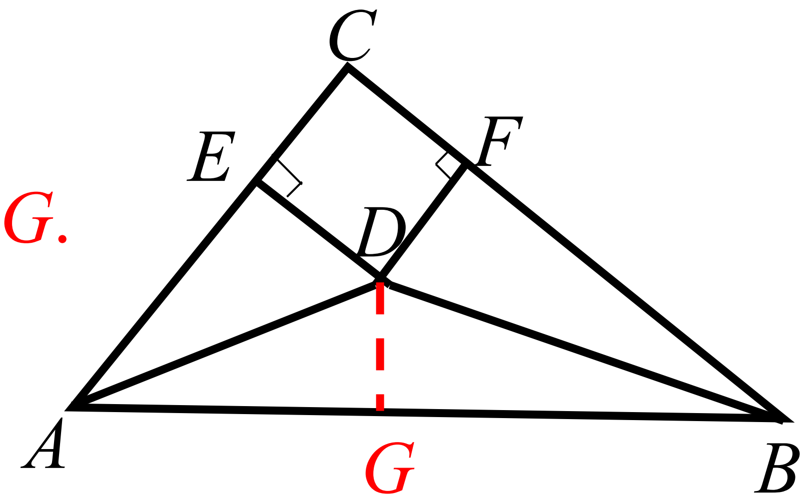
$DE\perp AC$，$DG\perp AB$，

$\therefore DE=DG$.

同理得$DG=DF$，

$\therefore ED=DF$，

$\therefore$四边形$ADFC$是正方形.



例3 如图，EG, FH过正方形$ABCD$的对角线的交点O，且$EG \perp FH$.求证：四边形$EFGH$是正方形.

证明：∵四边形$ABCD$为正方形，

∴$OB=OC$, $\angle ABO=\angle BCO=45^\circ$，

$\angle BOC=90^\circ=\angle COH+\angle BOH$.

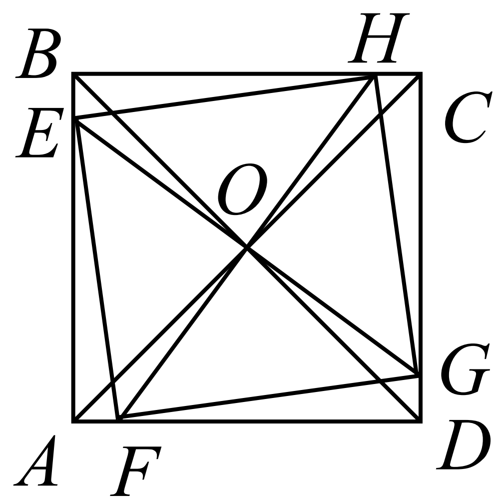
∵$EG \perp FH$,

∴$\angle BOE+\angle BOH=90^\circ$，

∴$\angle COH=\angle BOE$,

∴$\triangle CHO \cong \triangle BEO$, ∴$OE=OH$.

同理可证：$OE=OF=OG$,



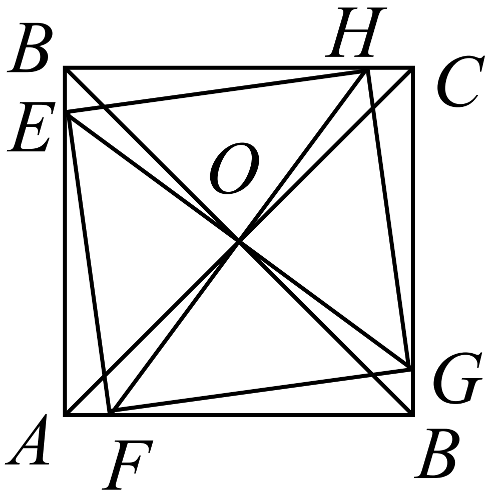
$\therefore OE=OF=OG=OH$.

又$\because EG\perp FH$,

$\therefore$四边形$EFGH$为菱形.

$\because EO+GO=FO+HO$，即$EG=HF$,

$\therefore$四边形$EFGH$为正方形.



例4　如图，正方形$ABCD$，动点E在AC上，$AF\perp AC$，垂足为A，$AF=AE$.

（1）求证：$BF=DE$；

（2）当点E运动到AC中点时(其他条件都保持不变)，问四边形$AFBE$是什么特殊四边形？说明理由.

（1）证明：∵正方形$ABCD$，

∴$AB=AD$，$\angle BAD=90°$，

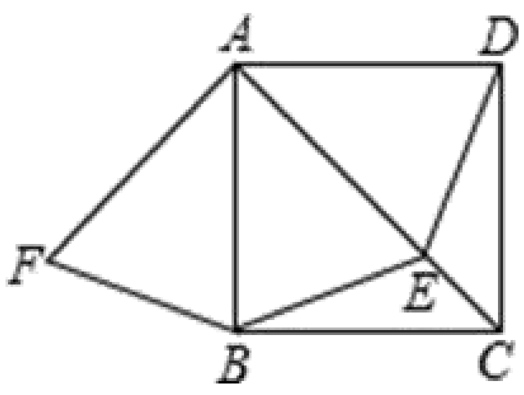
∵$AF\perp AC$，∴$\angle EAF=90°$，

∴$\angle BAF=\angle EAD$，

在$\triangle ADE$和$\triangle ABF$中，

$AD=AB$，$\angle DAE=\angle BAF$，$AE=AF$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle ABF$（SAS），∴$BF=DE$；



（2）解：当点E运动到AC的中点时四边形$AFBE$是正方形，

理由：∵点E运动到AC的中点，$AB=BC$，

∴$BE\perp AC$，$BE=AE=\frac{1}{2}AC$，

∵$AF=AE$，

∴$BE=AF=AE$.

又∵$BE\perp AC$，$\angle FAE=\angle BEC=90°$，

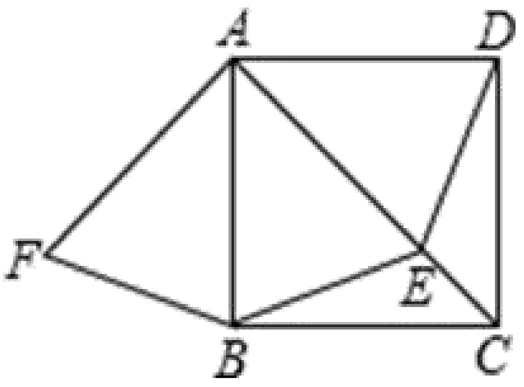
∴$BE\parallel AF$，

∵$BE=AF$，

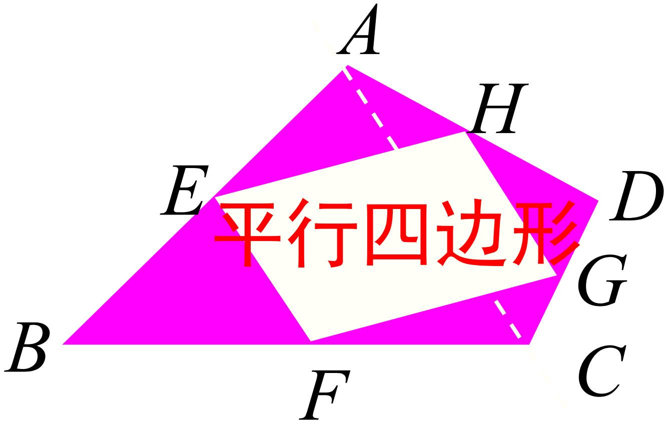
∴得平行四边形$AFBE$，

∵$\angle FAE=90°$，$AF=AE$，

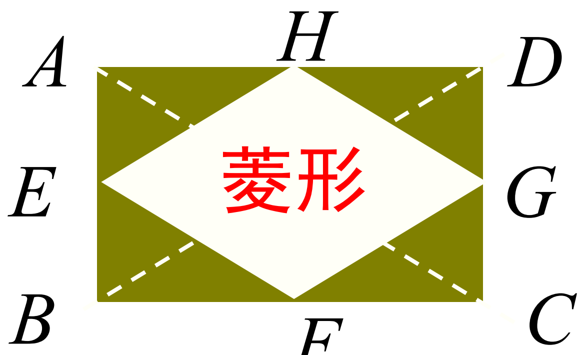
∴四边形$AFBE$是正方形.



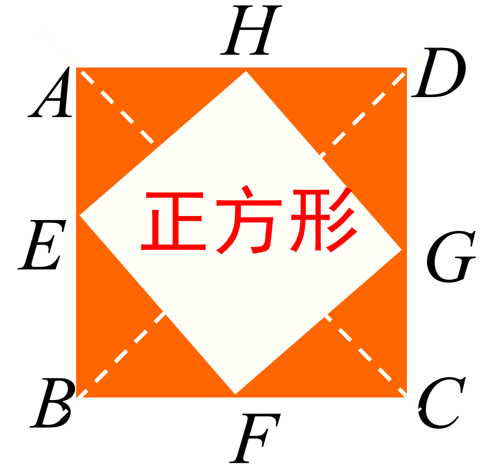
思考　前面学菱形时我们探究了顺次连接任意四边形各边中点所得的四边形是平行四边形.顺次连接矩形各边中点能得到菱形，那么顺次连接正方形各边中点能得到怎样的特殊平行四边形？



任意四边形



矩形



正方形

1.下列命题正确的是（ D ）

A.四个角都相等的四边形是正方形

B.四条边都相等的四边形是正方形

C.对角线相等的平行四边形是正方形

D.对角线互相垂直的矩形是正方形

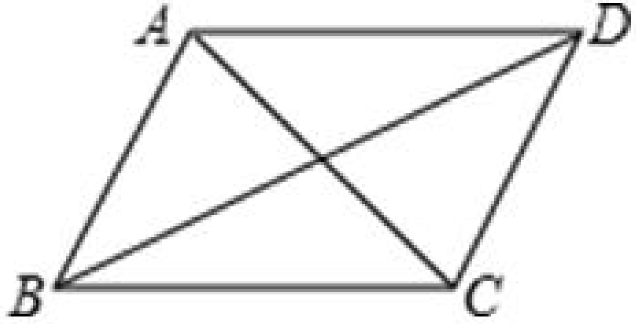
2.如图，已知四边形$ABCD$是平行四边形，下列结论中不正确的是（ D ）

A．当$AB=BC$时，四边形$ABCD$是菱形

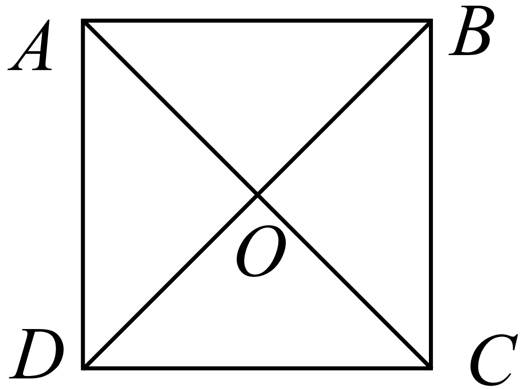
B．当$AC\perp BD$时，四边形$ABCD$是菱形

C．当$\angle ABC=90°$时，四边形$ABCD$是矩形

D．当$AC=BD$时，四边形$ABCD$是正方形



3.如图，四边形$ABCD$中，$\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=90°$，请添加一个条件<u>$AB=BC$(答案不唯一)</u>，可得出该四边形是正方形.

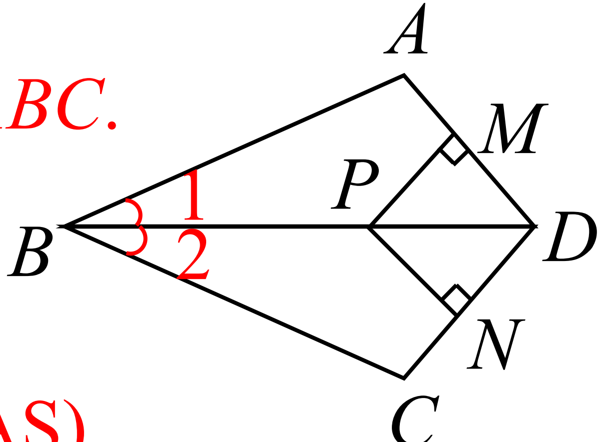


4.已知四边形$ABCD$是平行四边形，再从①$AB=BC$，②$\angle ABC=90°$，③$AC=BD$，④$AC\perp BD$四个条件中，选两个作为补充条件后，使得四边形$ABCD$是正方形，其中错误的是<u>②③或①④</u>（只填写序号）.

5.如图，在四边形$ABCD$中，$AB=BC$，对角线BD平分$\angle ABC$，P是BD上一点，过点P作$PM\perp AD$，$PN\perp CD$，垂足分别为M、N.

(1) 求证：$\angle ADB=\angle CDB$;

(2) 若$\angle ADC=90°$，求证：四边形$MPND$是正方形.



证明：（1）$\because AB=BC, BD$平分$\angle ABC$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (SAS).

$\therefore \angle ADB=\angle CDB$.

（2）$\because \angle ADC=90°$；

又$\because PM \perp AD, PN \perp CD$;

$\therefore \angle PMD=\angle PND=90°$．

$\therefore$四边形$NPMD$是矩形.

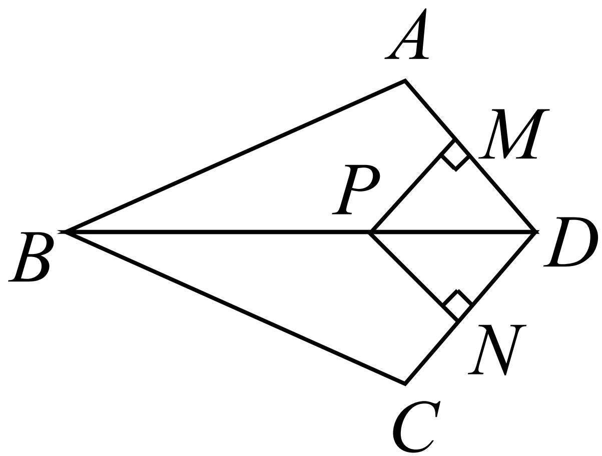
$\because \angle ADB=\angle CDB$;

$\therefore \angle ADB=\angle CDB=45°$．

$\therefore \angle MPD=\angle NPD=45°$．

$\therefore DM=PM, DN=PN$.

$\therefore$四边形$NPMD$是正方形.



6.如图，$\triangle ABC$中，D是BC上任意一点，$DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$.

（1）试说明四边形$AEDF$的形状，并说明理由.

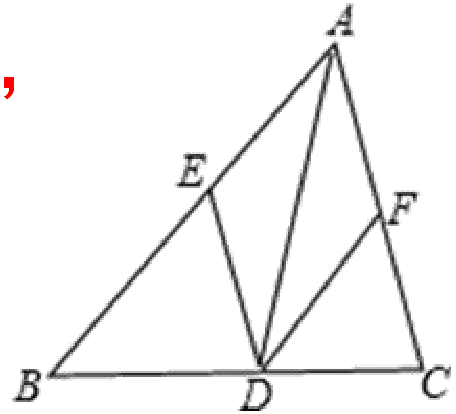
（2）连接AD，当AD满足什么条件时，四边形$AEDF$为菱形，为什么？

解：（1）$\because DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，

$\therefore$四边形$AEDF$为平行四边形.

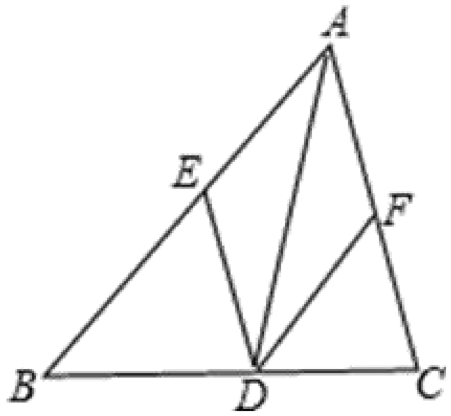
（2）$\because$四边形$AEDF$为菱形，

$\therefore AD$平分$\angle BAC$，



则AD平分$\angle BAC$时，四边形$AEDF$为菱形.

（3）在（2）的条件下，当△*ABC*满足什么条件时，四边形*AEDF*为正方形，不说明理由.

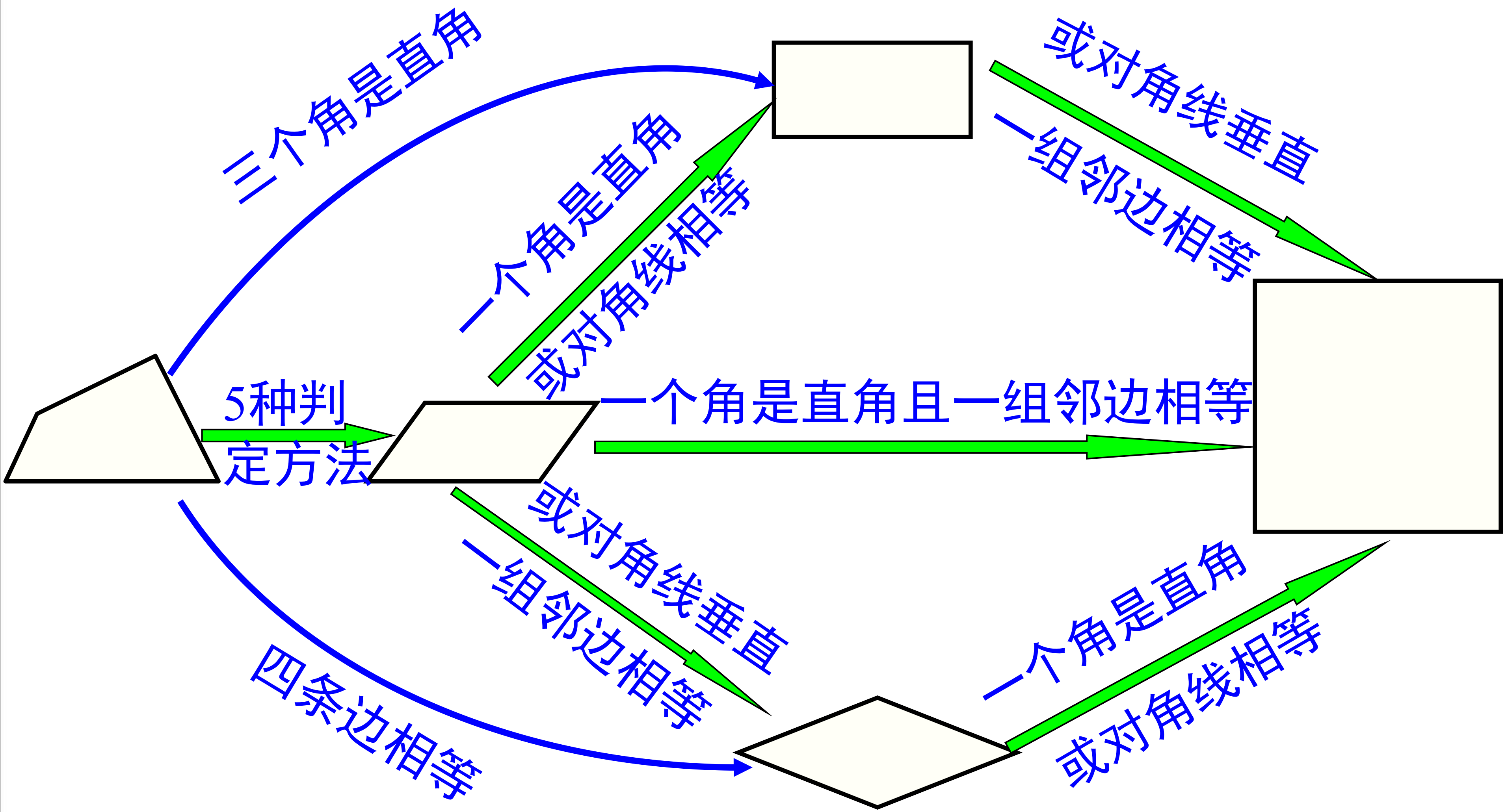


解：由四边形*AEDF*为正方形

∴$\angle BAC=90°$，

∴$\triangle ABC$是以*BC*为斜边的直角三角形即可.

平行四边形、矩形、菱形、正方形的判定小结



见《学练优》本课时练习