



第十九章 一次函数

19.2.3 一次函数与方程、不等式

导入新课

讲授新课

当堂练习

课堂小结

学习目标

1. 认识一次函数与一元（二元）一次方程（组）、一元一次不等式之间的联系。（重点、难点）
2. 会用函数观点解释方程和不等式及其解（解集）的意义。

观察与思考

今天数学王国搞了个家庭Party，各个成员按照自己所在的集合就坐，这时来了“ $x+y=5$ ”。

$$x+y=5$$

到我这
里来

这是怎么回事？
 $x+y=5$ 应该坐在哪
里呢？

到我这
里来

二元一次方程



一次函数

一次函数与一元一次方程

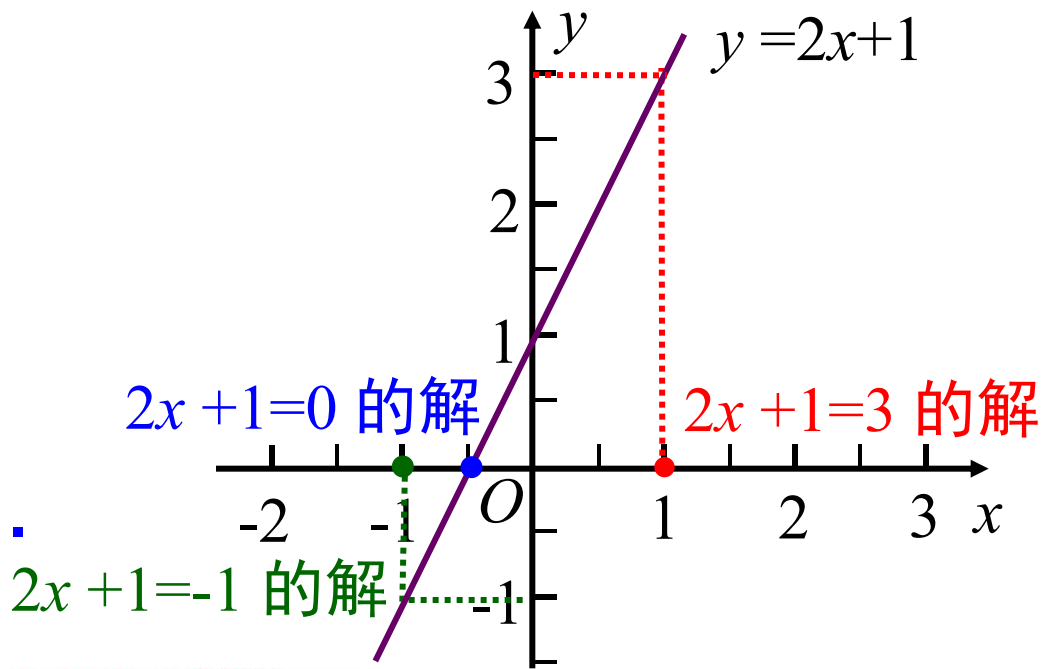
合作探究

问题1 下面三个方程有什么共同特点？你能从函数的角度对解这三个方程进行解释吗？

(1) $2x+1=3$; (2) $2x+1=0$; (3) $2x+1=-1$.

用函数的观点看：
解一元一次方程

$ax + b = k$ 就是求当函数 $(y=ax + b)$ 值为 k 时对应的自变量的值.



练一练

1. 直线 $y=2x+20$ 与 x 轴交点坐标为 (-10, 0) ,
这说明方程 $2x+20=0$ 的解是 $x=$ -10 .

2. 若方程 $kx+2=0$ 的解是 $x=5$, 则直线 $y=kx+$
 $+2$ 与 x 轴交点坐标为 (5, 0) .

归纳总结

一次函数与一元一次方程的关系

求一元一次方程
 $kx+b=0$ 的解.

从“函数值”看

一次函数 $y=kx+b$
中, $y=0$ 时 x 的值.

求一元一次方程
 $kx+b=0$ 的解.

从“函数图象”看

求直线 $y=kx+b$
与 x 轴交点的横
坐标.

典例精析

例1 一个物体现在的速度是5米/秒，其速度每秒增加2米/秒，再过几秒它的速度为17米/秒？(从方程、函数解析式及图象三个不同方面进行解答)

解法1： 设再过 x 秒它的速度为17米/秒，

$$\text{由题意得 } 2x+5=17$$

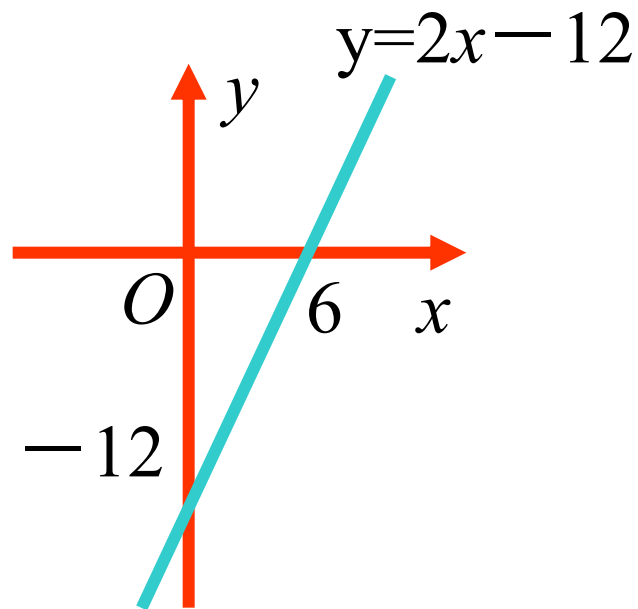
$$\text{解得 } x=6$$

答： 再过6秒它的速度为17米/秒.

解法2：速度 y （单位：米/秒）是时间 x （单位：秒）的函数 $y=2x+5$

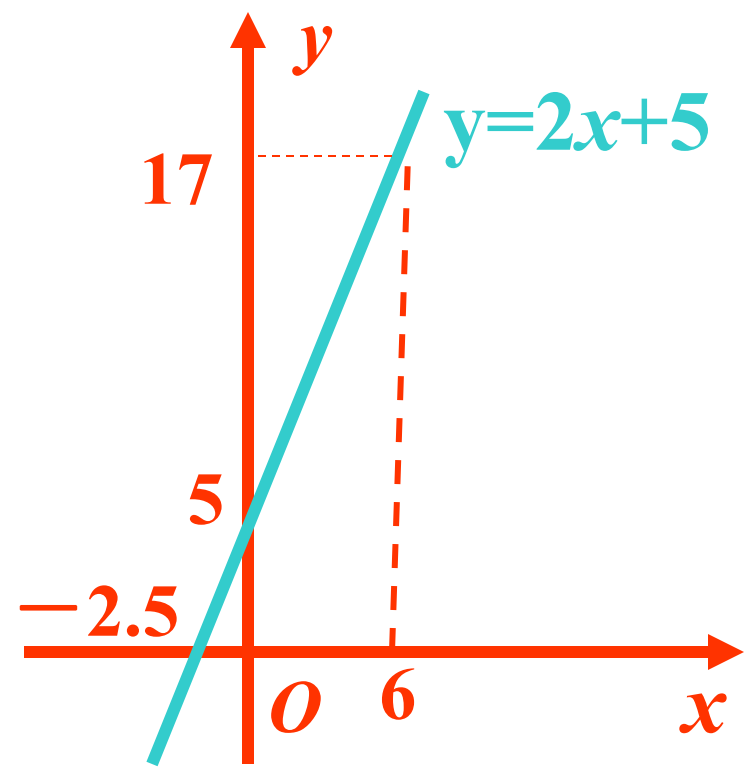
由 $2x+5=17$ 得 $2x-12=0$

由右图看出直线
 $y=2x-12$ 与 x 轴的
交点为 $(6, 0)$ ，
得 $x=6$.



解法3：速度 y （单位：米/秒）是时间 x （单位：秒）的函数 $y=2x+5$

由右图可以看出当
 $y=17$ 时， $x=6$.



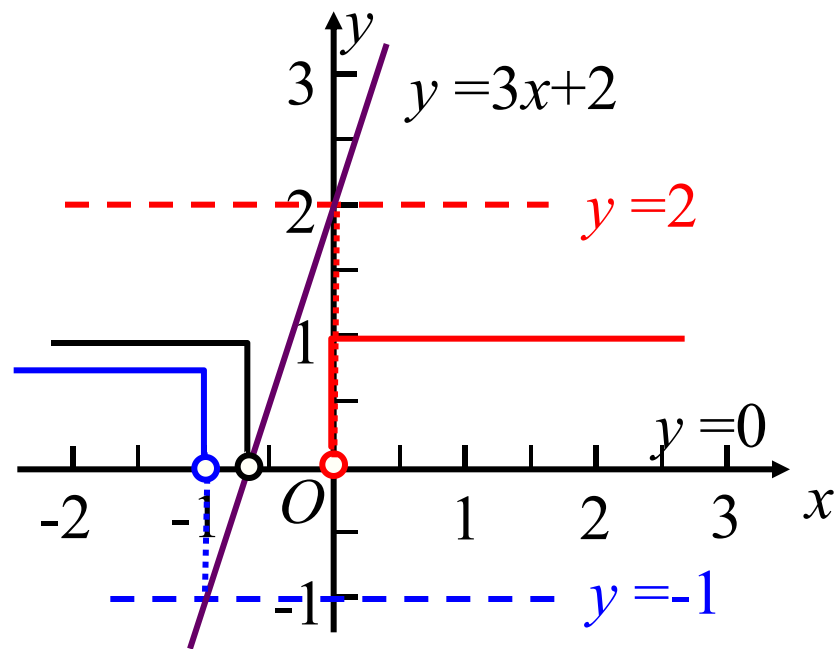
一次函数与一元一次不等式

问题2 下面三个不等式有什么共同特点？你能从函数的角度对解这三个不等式进行解释吗？能把你得出的结论推广到一般情形吗？

$$(1) 3x+2 > 2; \quad (2) 3x+2 < 0; \quad (3) 3x+2 < -1.$$

不等式 $ax+b > c$ 的解集
就是使函数 $y = ax+b$ 的函数
值大于 c 的对应的自变量取
值范围；

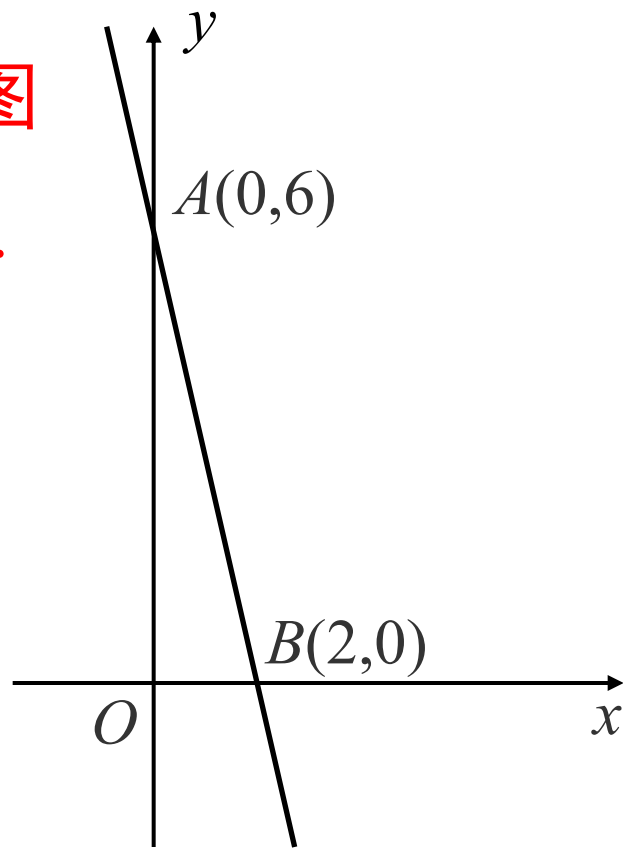
不等式 $ax+b < c$ 的解集
就是使函数 $y = ax+b$ 的函数
值小于 c 的对应的自变量取
值范围.



例2 画出函数 $y=-3x+6$ 的图象，结合图象求：

- (1) 不等式 $-3x+6>0$ 和 $-3x+6<0$ 的解集；
- (2) 当 x 取何值时， $y<3$ ？

解：作出函数 $y=-3x+6$ 的图象，如图所示，图象与 x 轴交于点 $B(2, 0)$ 。

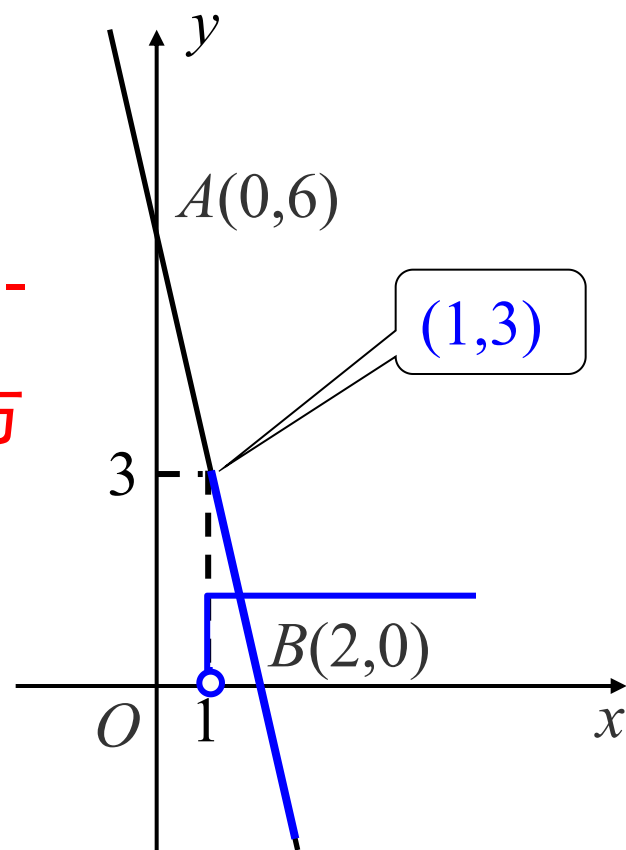


(1) 不等式 $-3x+6>0$ 和 $-3x+6<0$ 的解集;

(2) 当 x 取何值时, $y<3$?

解: (1) 由图象可知, 不等式 $-3x+6>0$ 的解集是图象位于 x 轴上方的 x 的取值范围, 即 $x<2$; 不等式 $-3x+6<0$ 的解集是图象位于 x 轴下方的 x 的取值范围, 即 $x>2$;

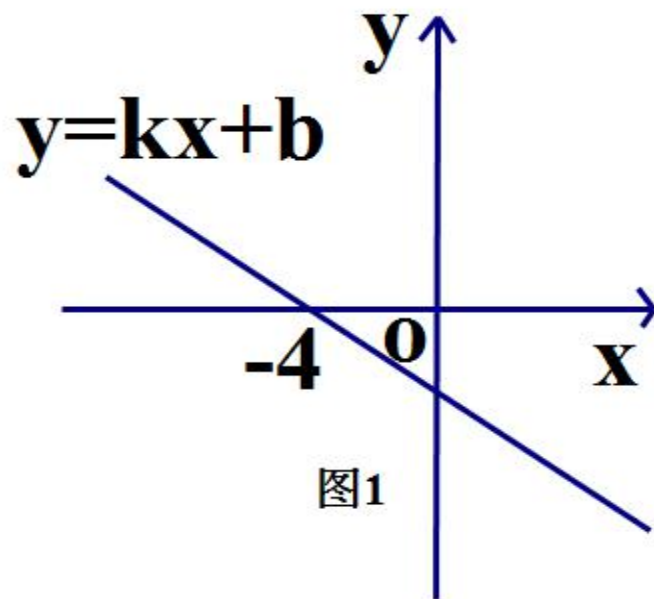
(2) 由图象可知, 当 $x>1$ 时, $y<3$.



做一做

如图，已知直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于点 $(-4,0)$ ，则当 $y>0$ 时， x 的取值范围是（ C ）

- A. $x > -4$
- B. $x > 0$
- C. $x < -4$
- D. $x < 0$



归纳总结

一次函数与一元一次不等式的关系

求 $kx+b > 0$ (或 < 0)
($k \neq 0$)的解集

从“函数值”看

$y=kx+b$ 的值
大于(或小于)0时,
 x 的取值范围

求 $kx+b > 0$ (或 < 0)
($k \neq 0$)的解集

从“函数图象”看

确定直线 $y=kx+b$
在 x 轴上方(或下方)
的图象所对应的 x
取值范围

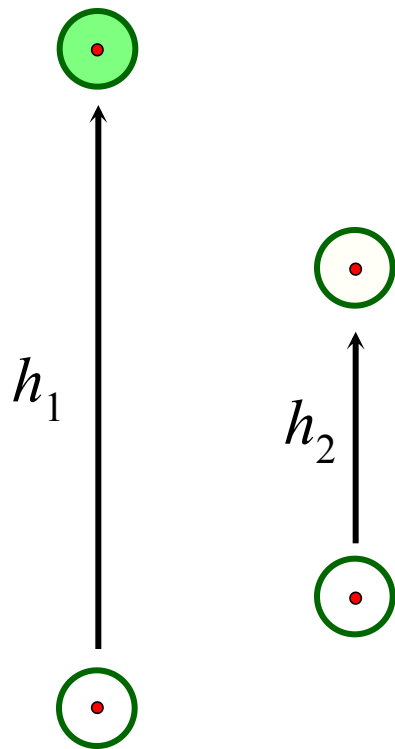
一次函数与二元一次方程组

问题3 1号探测气球从海拔5 m 处出发，以1 m/min 的速度上升. 与此同时，2号探测气球从海拔15 m 处出发，以0.5 m/min 的速度上升. 两个气球都上升了1 h.

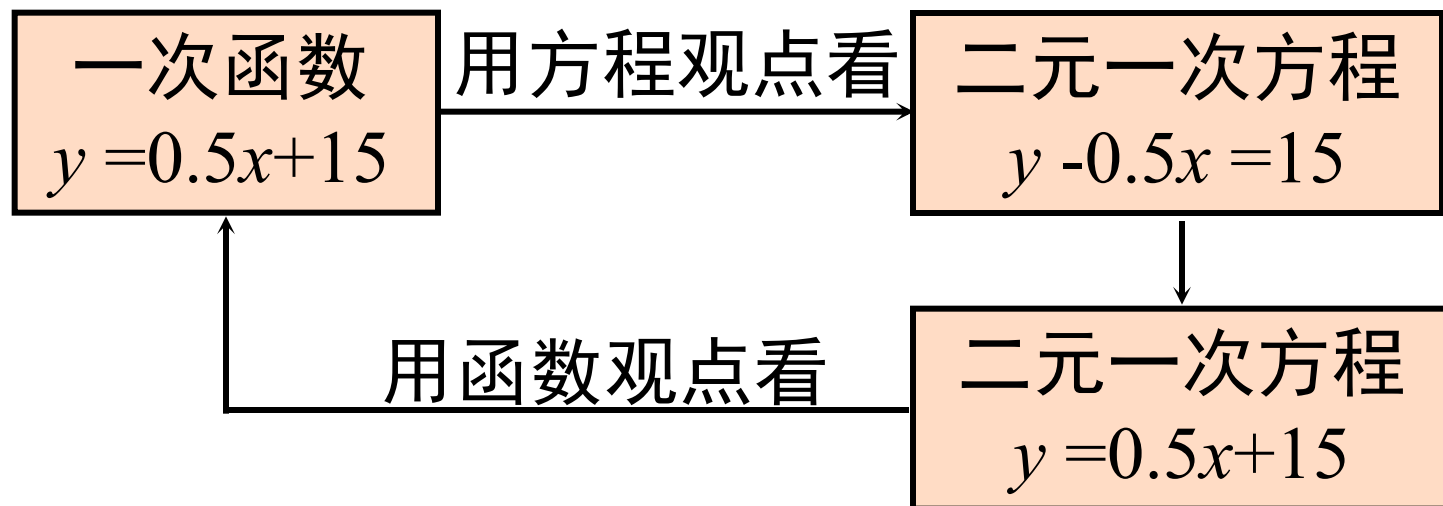
(1) 请用解析式分别表示两个气球所在位置的海拔 $y(\text{m})$ 与气球上升时间 $x(\text{min})$ 的函数关系.

气球1 海拔高度: $y = x + 5$;

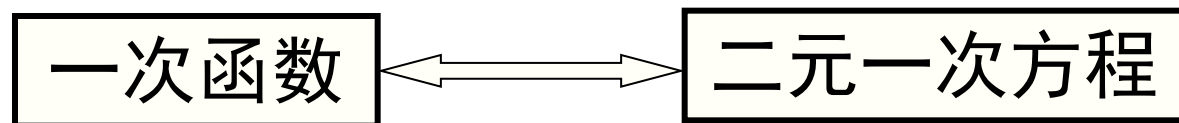
气球2 海拔高度: $y = 0.5x + 15$.



思考1：一次函数与二元一次方程有什么关系？



从式子（数）角度看：



思考2：从形的角度看，一次函数与二元一次方程有什么关系？

由函数图象的定义可知：

直线 $y = 0.5x + 15$ 上的每个点

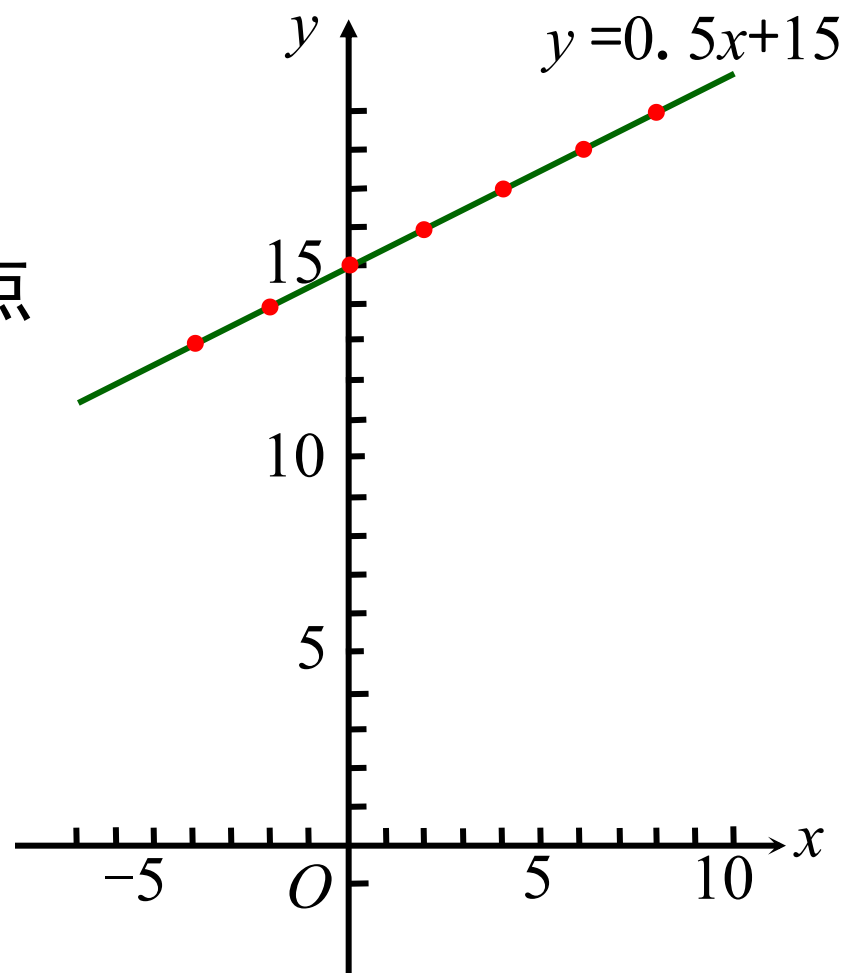
的坐标 (x, y) 都能使等式

$y = 0.5x + 15$ 成立，即直线 y

$= 0.5x + 15$ 上的每个点的坐

标都是二元一次方程

$y = 0.5x + 15$ 的解

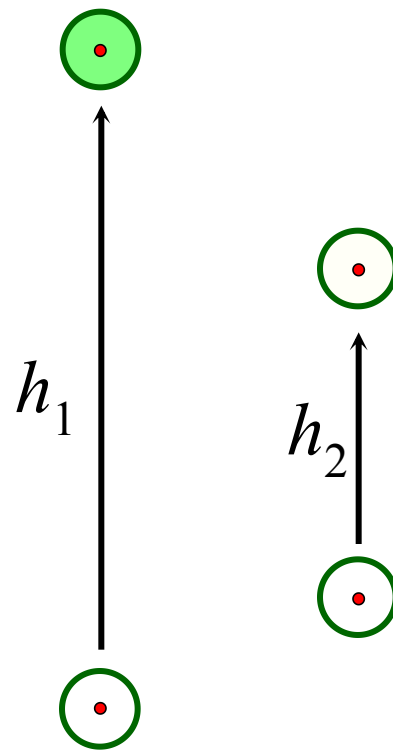


(2) 什么时刻，1号气球的高度赶上2号气球的高度？这时的高度是多少？请从数和形两方面分别加以研究。

从数的角度看：

$$\text{解方程组} \begin{cases} y = x + 5 \\ y = 0.5x + 15 \end{cases}$$

就是求自变量为何值时，
两个一次函数 $y = x + 5$ ，
 $y = 0.5x + 15$ 的函数值相等，
并求出函数值。

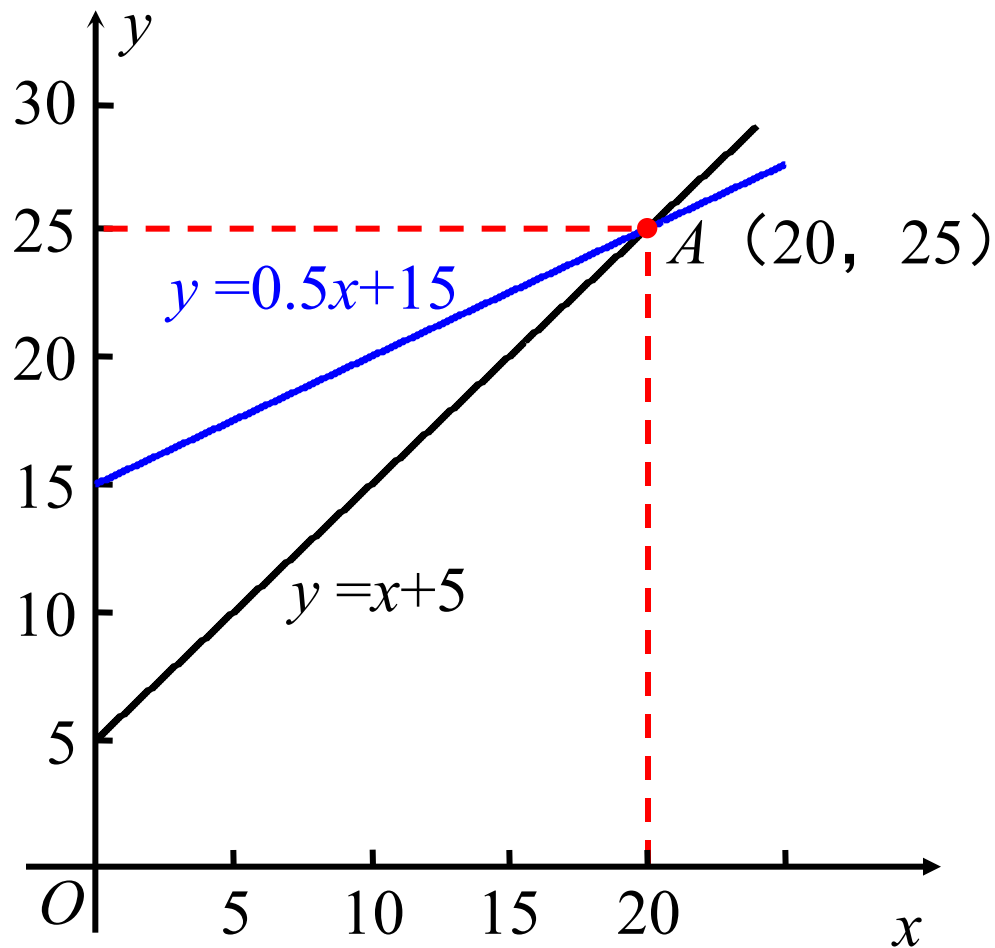


气球1 海拔高度： $y = x + 5$

气球2 海拔高度： $y = 0.5x + 15$

从形的角度看，二元一次方程组与一次函数
有什么关系？

二元一次方程
组的解就是相应的
两个一次函数图象
的交点坐标。



归纳总结

一般地，任何一个二元一次方程都可以转化为一次函数 $y=kx+b$ (k 、 b 为常数，且 $k\neq 0$)的形式，所以每个二元一次方程都对应一个一次函数，也对应一条直线。

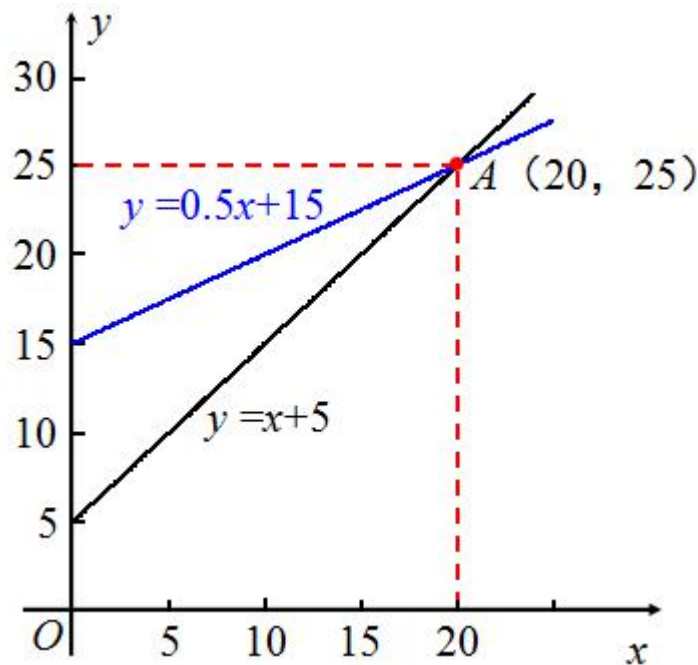
方程组的解 \iff **对应两条直线交点的坐标.**

观察函数图象，直接回答下列问题：

- (1) 在什么时候，1号气球比2号气球高？
- (2) 在什么时候，2号气球比1号气球高？

(1) 20min后，1号气球比2号气球高.

(2) 0~20min时，1号气球比2号气球高.

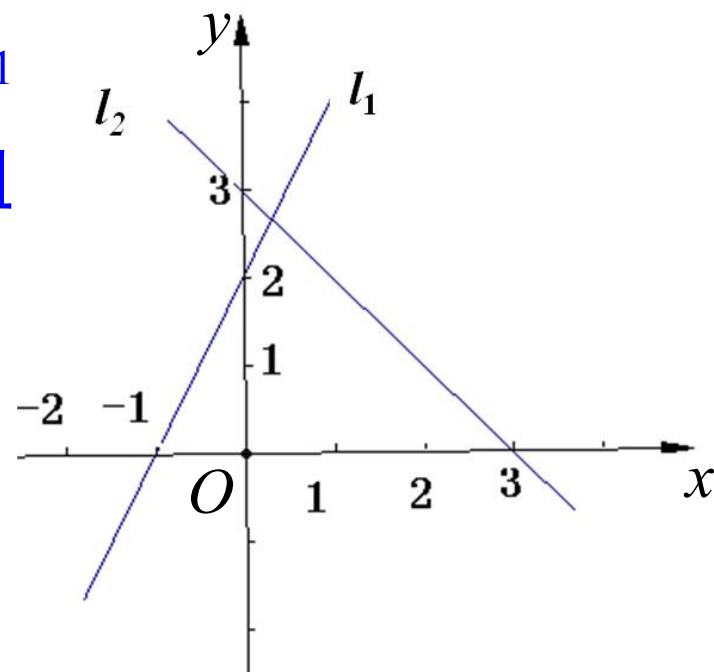


气球1 海拔高度： $y = x + 5$

气球2 海拔高度： $y = 0.5x + 15$

例2 如图，求直线 l_1 与 l_2 的交点坐标.

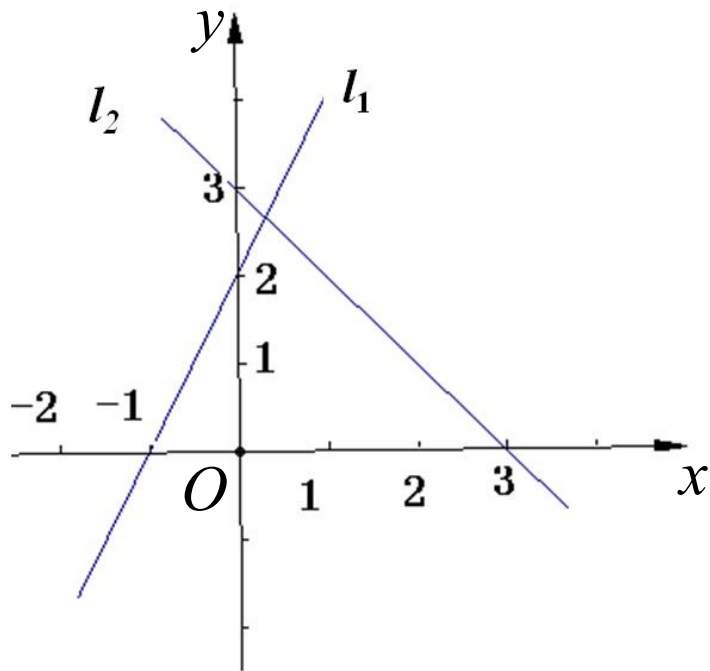
分析：由函数图象可以求直线 l_1 与 l_2 的解析式，进而通过方程组求出交点坐标.



解：因为直线 l_1 过点 $(-1, 0)$ ，
 $(0, 2)$ ，用待定系数法可求得
直线 l_1 的解析式为 $y = 2x + 2$.同理
可求得直线 l_2 的解析式为 $y = -x + 3$.

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y = 2x + 2, \\ y = -x + 3, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{8}{3}, \end{cases}$$

即直线 l_1 与 l_2 的交点坐标为 $(\frac{1}{3}, \frac{8}{3})$.



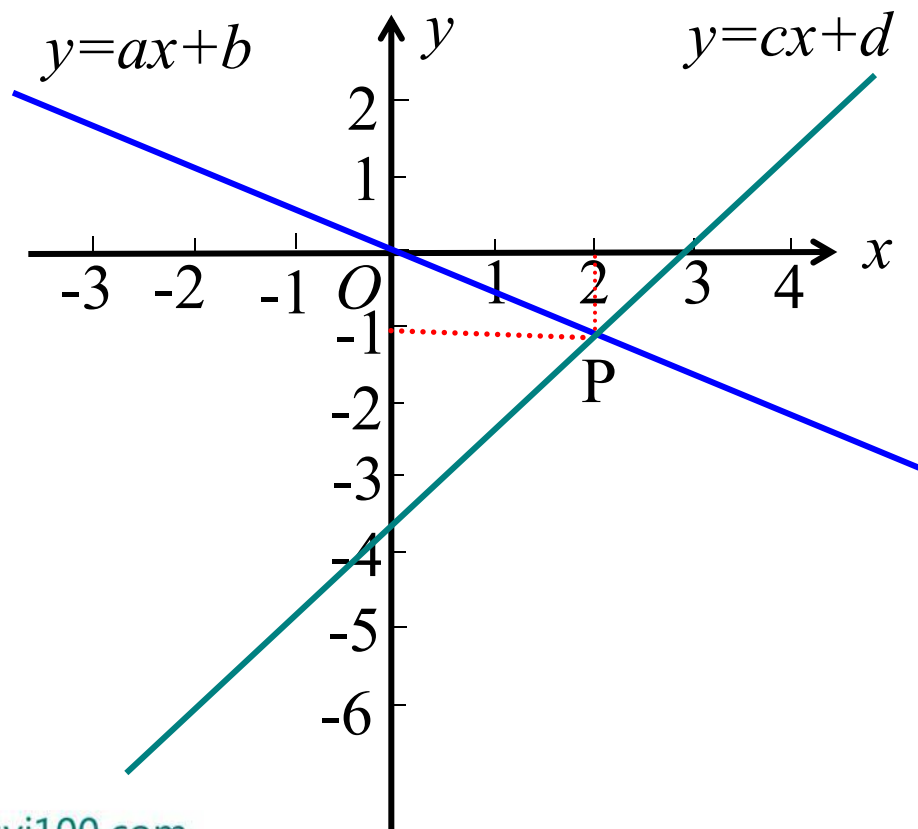
练一练

如图，一次函数 $y=ax+b$ 与 $y=cx+d$ 的图象交于点P，

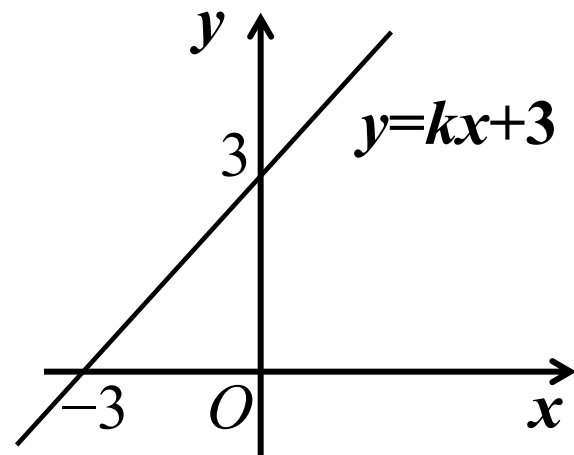
则方程组 $\begin{cases} y = ax + b, \\ y = cx + d, \end{cases}$ 的解是多少？

解：此方程组的解是

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -1. \end{cases}$$



1. 一次函数 $y=kx+3$ 的图象如图所示, 则方程 $kx+3=0$ 的解为 $x=-3$.



2. 若方程组 $\begin{cases} 2x - y = -1, \\ 3x - y = 1, \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x = 2, \\ y = 5, \end{cases}$ 则一次函

数 $y=2x+1$ 与 $y=3x-1$ 的图象交点坐标为 $(2,5)$.

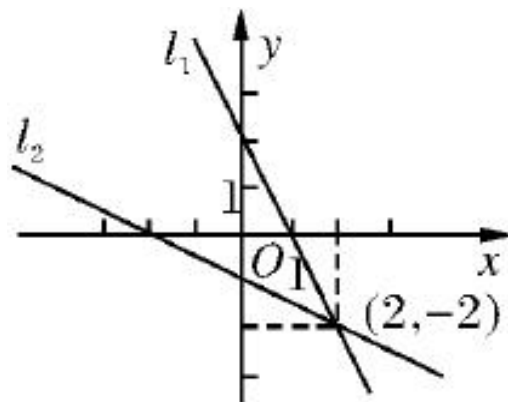
3.小亮用作图象的方法解二元一次方程组时，在同一直角坐标系内作出了相应的两个一次函数的图象 l_1 、 l_2 如图，他解的这个方程组是(D)

A.
$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = \frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} y = 3x - 8 \\ y = \frac{1}{2}x - 3 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -\frac{1}{2}x - 1 \end{cases}$$



点拨：由图象知 l_1 、 l_2 的 x 的系数都应为负数，排除 A、C. 又 l_1 、 l_2 的交点为 $(2, -2)$ ，代入验证可知只有 D 符合.

4. 一次函数 $y_1=4x+5$ 与 $y_2=3x+10$ 的图象如图所示, 则 $4x+5>3x+10$ 的解集是 (B)

- A. $x<5$
- B. $x>5$
- C. $x>-5$
- D. $x>25$

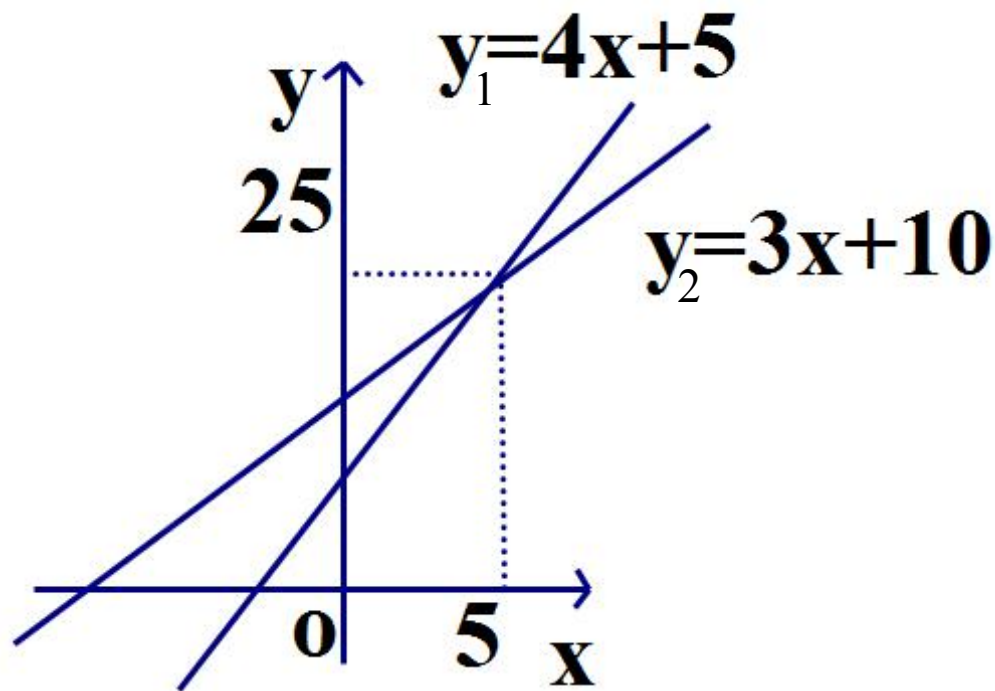


图3

一次函数与方程、不等式

解一元一次方程 \Leftrightarrow 对应一次函数的值为0时，求相应的自变量的值，即一次函数与 x 轴交点的横坐标.

解一元一次不等式 \Leftrightarrow 对应一次函数的函数值大（小）于0时，求自变量的取值范围，即在 x 轴上方(或下方)的图象所对应的 x 取值范围.

解二元一次方程组 \Leftrightarrow 求对应两条直线交点的坐标.

见《学练优》本课时练习