二次函数

22.1.3.2 二次函数

二次函数$y=a(x-h)^2$图象和性质

复习

1. 二次函数的图像都是抛物线.

2. 抛物线$y=ax^2$的图像性质：

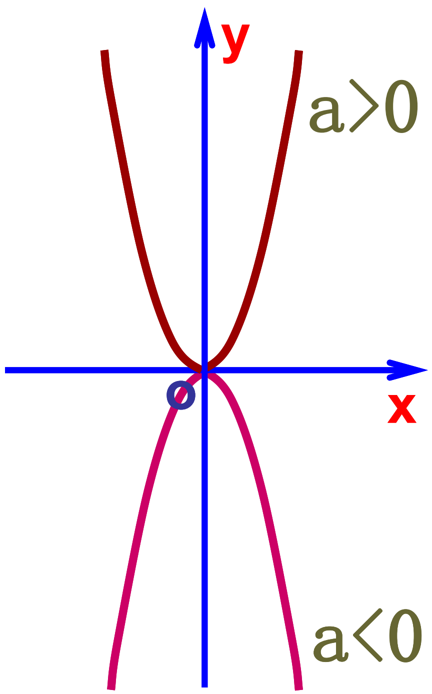
(1) 抛物线$y=ax^2$的对称轴是 y 轴，顶点是 原点

(2) 当$a>0$时，抛物线的开口向 上 ，顶点是抛物线的最 低 点；

当$a<0$时，抛物线的开口向 下，顶点是抛物线的最 高 点；

$|a|$越大，抛物线的开越 小 ；

$|a|$越小，抛物线的开越 大 ；



(3) $a>0$时， 在y轴左侧，y随x的增大而减小，在y轴右侧，y随x增大而增大；

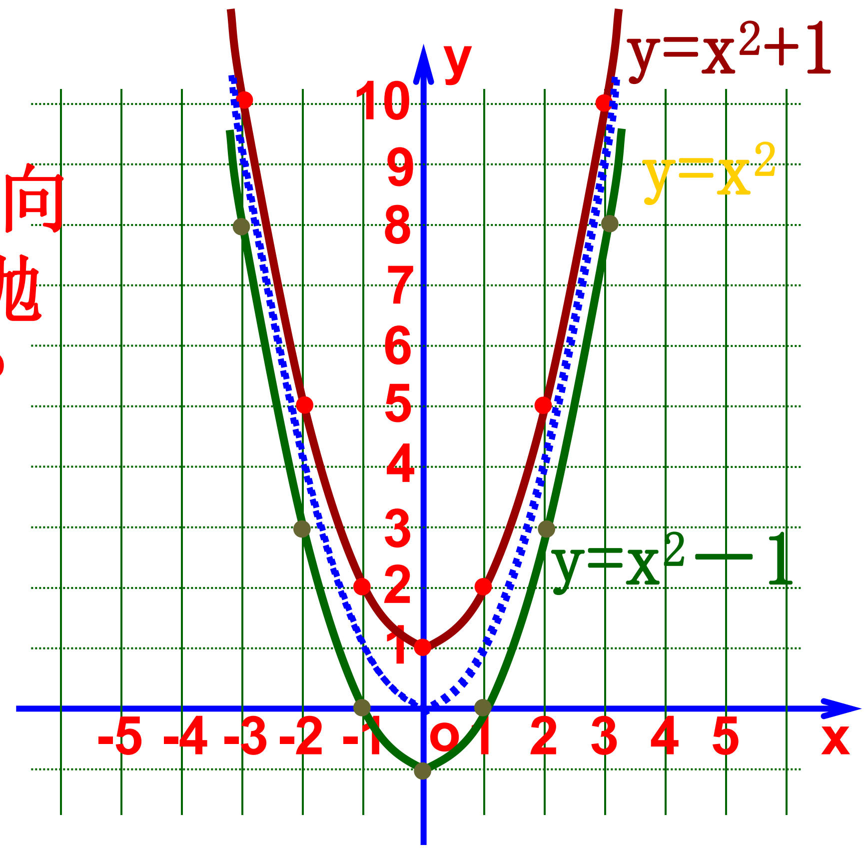
$a<0$时， 在y轴左侧，y随x的增大而增大，在y轴右侧，y随x增大而减少；

二次函数的图像

抛物线$y=x^2+1$, $y=x^2-1$与抛物线$y=x^2$的关系:

抛物线$y=x^2$ $\xrightarrow[\text{1个单位}]{\text{向上平移}}$ 抛物线 $y=x^2+1$

抛物线$y=x^2$ $\xrightarrow[\text{1个单位}]{\text{向下平移}}$ 抛物线 $y=x^2-1$



思考

把抛物线$y=2x^2+1$向上平移5个单位, 会得到那条抛物线?向下平移3.4个单位呢?

(1)得到抛物线$y=2x^2+6$

(2)得到抛物线$y=2x^2-2.4$

归纳

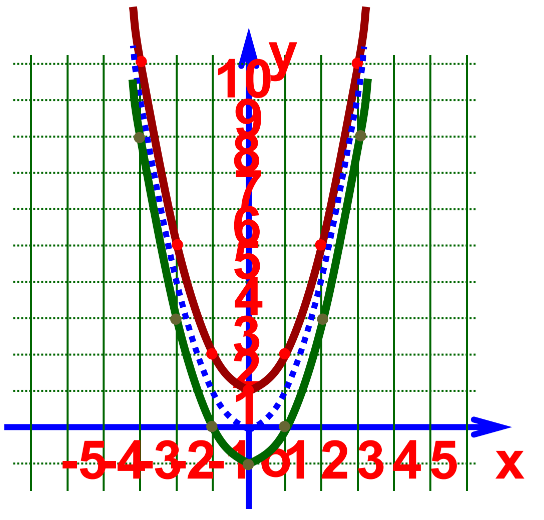
一般地，抛物线$y=ax^2+k$有如下特点：

(1)当$a>0$时， 开口向上；

当$a<0$时，开口向下；

(2)对称轴是y轴；

(3)顶点是$(0,k)$.



抛物线$y=ax^2+k$可以由抛物线$y=ax^2$向上或向下平移$|k|$得到.($k>0$,向上平移;$k<0$向下平移.)

探究

画出二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 、$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 的图像, 并考虑它们的开口方向、对称轴和顶点.：

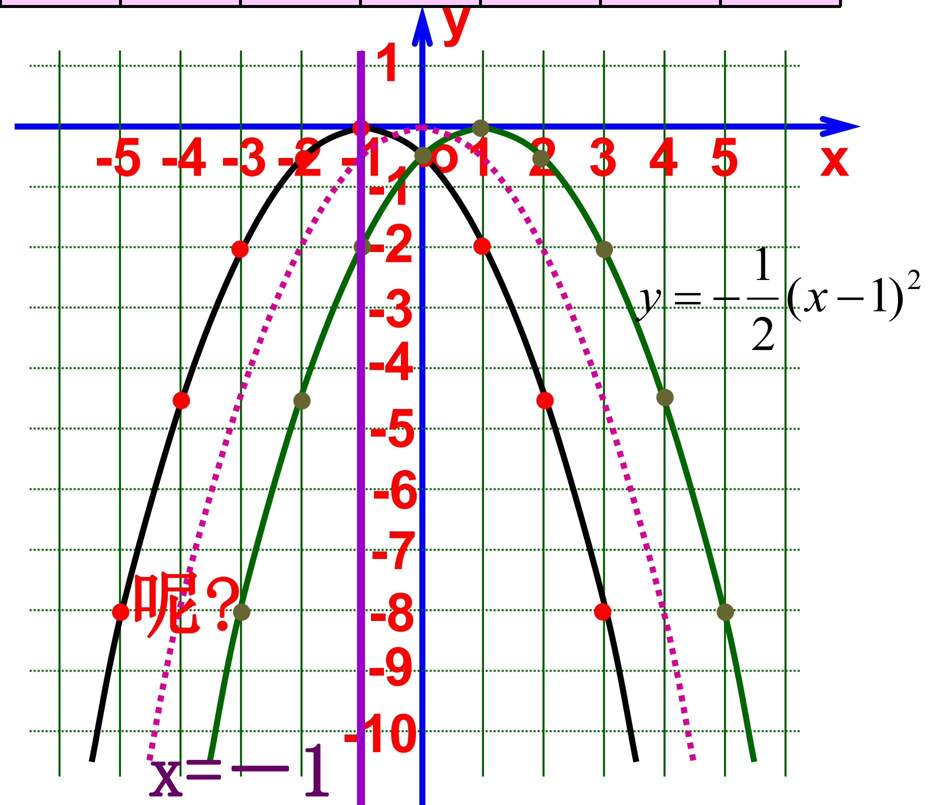
解： 先列表

描点

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$	…	−2	−0.5	0	−0.5	−2	−4.5	−8	…
$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$	…	−8	−4.5	−2	−0.5	0	−0.5	−2	…

可以看出, 抛物线的开口向下, $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$ 顶点是(－1, 0)；对称轴是经过点(－1, 0)且与x轴垂直的直线, 我们把它记为x=－1,

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 呢?



讨论

抛物 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$，$y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$ 与抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 有什么关系?

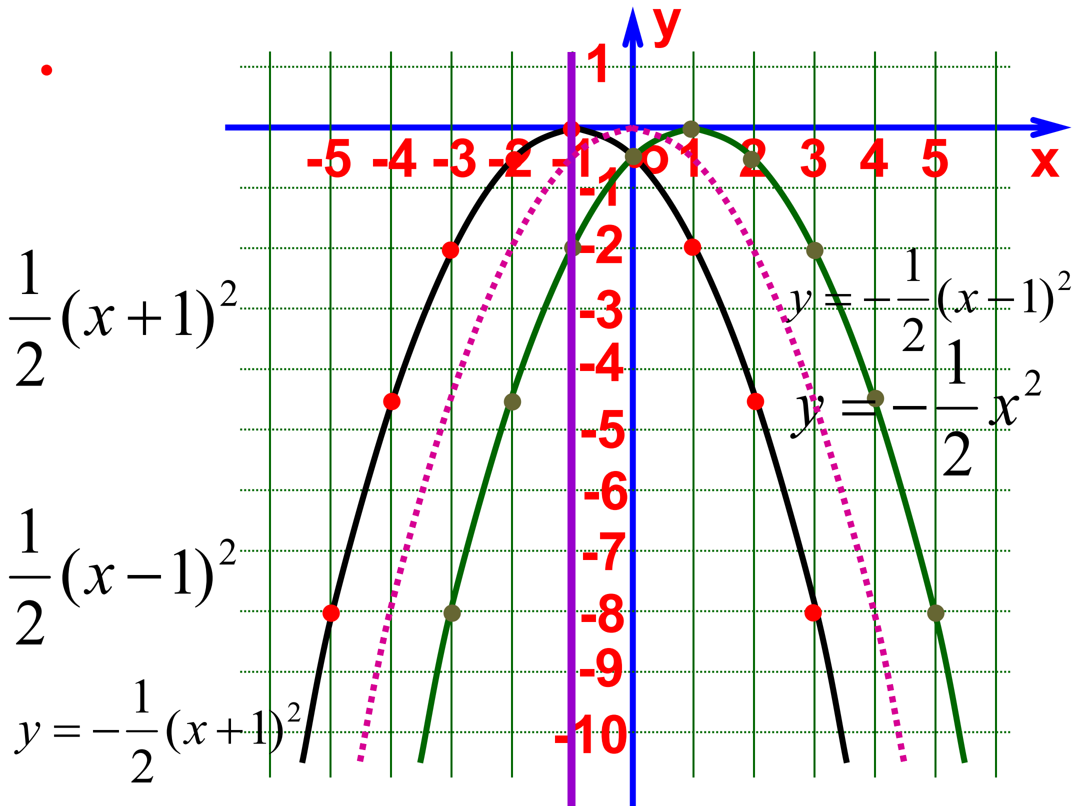
可以发现, 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向左平移1个单位, 就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$;

把抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 向右平移1个单位, 就得到抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$.

即：

$$y=-\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{1个单位}]{\text{向左平移}} y=-\frac{1}{2}(x+1)^2$$

$$y=-\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{1个单位}]{\text{向右平移}} y=-\frac{1}{2}(x-1)^2$$

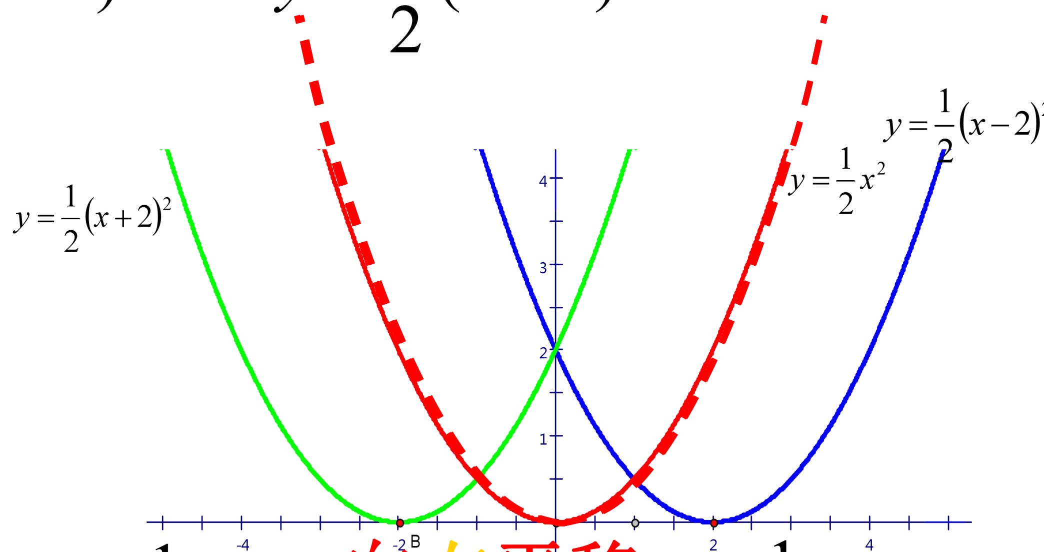


练习

在同一坐标系中作出下列二次函数:

$$y=\frac{1}{2}x^2 \qquad y=\frac{1}{2}(x+2)^2 \qquad y=\frac{1}{2}(x-2)^2$$

观察三条抛物线的相互关系,并分别指出它们的开口方向,对称轴及顶点.



$y=\frac{1}{2}(x+2)^2$ ←向左平移2个单位— $y=\frac{1}{2}x^2$ —向右平移2个单位→ $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$

顶点(−2, 0) ←向左平移2个单位— 顶点(0, 0) —向右平移2个单位→ 顶点(2, 0)

直线x=−2 ←向左平移2个单位— 对称轴:y轴即直线:x=0 —向右平移2个单位→ 直线x=2

二次函数*左右平移*的口诀

左加右减

例如：

$$y=2(x+1)^2 \xleftarrow{\text{向左平移1个单位}} y=2x^2 \xrightarrow{\text{向右平移1个单位}} y=2(x-1)^2$$

归纳

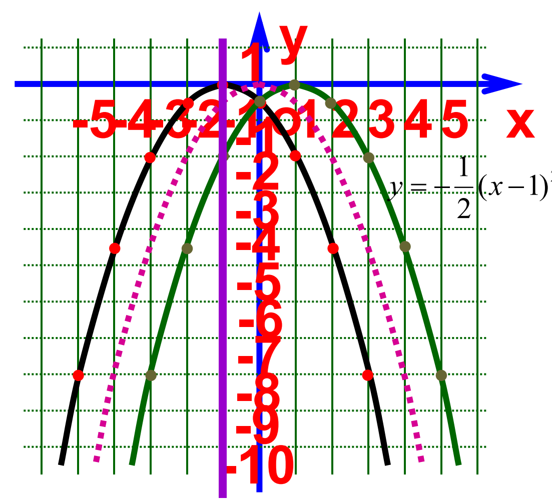
一般地,抛物线$y=a(x-h)^2$有如下特点:

(1) 当$a>0$时，开口向上;

当$a<0$时,开口向下;

(2) 对称轴是$x=h$;

(3) 顶点是$(h,0)$.



抛物线$y=a(x-h)^2$可以由抛物线$y=ax^2$向左或向右平移$|h|$得到. ($h>0$,向右平移;$h<0$向左平移.)

练习

1、抛物线$y=4(x-3)^2$的开口方向<u>向上</u>，对称轴是<u>直线x=3</u>，顶点坐标是<u>（3，0）</u>，抛物线是最<u>低</u>点，当x=<u>3</u>时，y有最<u>小</u>值，其值为<u>0</u>。抛物线与x轴交点坐标<u>（3，0）</u>，与y轴交点坐标<u>（0，36）</u>。

2. 对于二次函数 $y=-\frac{1}{2}(x-6)^2$ 请回答下列问题:

(1) 把函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象作怎样的平移变换得到函数 $y=-\frac{1}{2}(x-6)^2$ 的图象.

(2) 说出函数 $y=-\frac{1}{2}(x-6)^2$ 的图象的顶点坐标和对称轴. 并说明x取何值时，函数取最大值?

$$y=-\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{6个单位}]{\text{向右平移}} y=-\frac{1}{2}(x-6)^2$$

如果反过来, 如何表述?

抛物线 $y=-\frac{1}{2}(x-6)^2$ 顶点(6, 0)，对称轴是直线x=6.

当x=6时, 函数y有最大值, $y_{最大}=0$.

3.函数$y=-4x^2+4x-1$的图象可以由抛物线$y=-4x^2$ 平移得到吗?应怎样平移?

$y=-4x^2+4x-1=-4(x-0.5)^2$

4.若抛物线$y=2(x-m)^{m^2-4m-3}$的顶点在x轴正半轴上,则m的值为(A)

A.m=5　　　B.m=-1

C.m=5或m=-1　　　D.m=-5

5、若将抛物线$y=-2（x-2）^2$的图象的顶点移到原点，则下列平移方法正确的是（ C ）

A、向上平移2个单位

B、向下平移2个单位

C、向左平移2个单位

D、向右平移2个单位

6、按下列要求求出二次函数的解析式：

（1）已知抛物线$y=a(x-h)^2$经过点（-3，2）（-1，0）求该抛物线线的解析式。

（2）形状与$y=-2(x+3)^2$的图象形状相同，但开口方向不同，顶点坐标是（1，0）的抛物线解析式。

（3）已知二次函数图像的顶点在x轴上，且图像经过点（2，-2）与（-1，-8）。求此函数解析式。

7.如何平移：

$$\begin{tikzcd}
y=\frac{3}{4}(x+1)^2 \arrow[r] & y=\frac{3}{4}(x-1)^2 \arrow[d] \\
y=\frac{3}{4}(x+3)^2 \arrow[u] & y=\frac{3}{4}(x-5)^2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

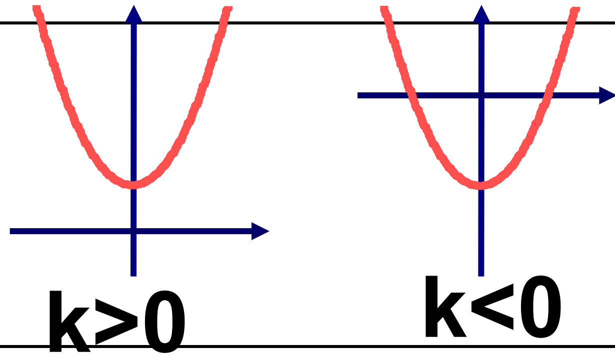
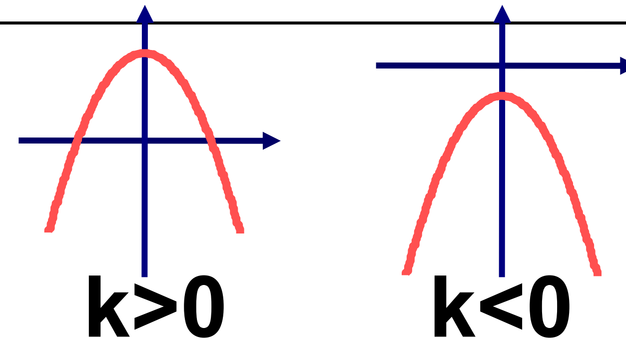
$$y=-\frac{1}{2}x^2-3 \longrightarrow y=-\frac{1}{2}(x-6)^2$$

8. 用配方法把下列函数化成y=a（x-h）^{2}的形式，并说出开口方向，顶点坐标和对称轴。

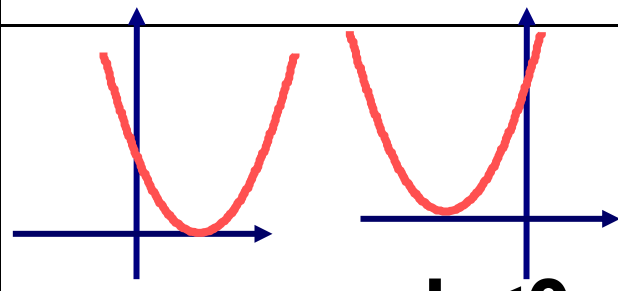
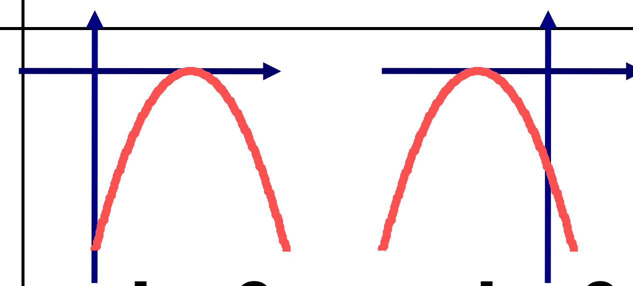
$$(1)\ y=-x^{2}+6x-9$$

$$(2)\ y=\frac{1}{2}x^{2}-2x+2$$

二次函数$y=ax^2+k$的性质

$y=ax^2+k$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口	开口向上	开口向下
	a的绝对值越大，开口越小	
对称性	关于y轴对称	
顶点	(0,k)	
	顶点是最低点	顶点是最高点
增减性	在对称轴左侧递减 在对称轴右侧递增	在对称轴左侧递增 在对称轴右侧递减

二次函数$y=a(x-h)^2$的性质

$y=a(x-h)^2$	$a>0$	$a<0$
图象		
开口	开口向上	开口向下
	a的绝对值越大，开口越小	
对称性	直线 $x=h$	
顶点	$(h,0)$	
	顶点是最低点	顶点是最高点
增减性	在对称轴左侧递减 在对称轴右侧递增	在对称轴左侧递增 在对称轴右侧递减

小结

1. 抛物线$y=ax^2+k$、抛物线$y=a(x-h)^2$和抛物线$y=ax^2$的形状完全相同,开口方向一致;

当$a>0$时, 开口向上;当$a<0$时,开口向下.

2. 抛物线$y=ax^2+k$可以由抛物线$y=ax^2$向上或向下平移$|k|$得到. ($k>0$,向上平移;$k<0$向下平移.)

抛物线$y=a(x-h)^2$可以由抛物线$y=ax^2$向左或向右平移$|h|$得到. ($h>0$,向右平移;$h<0$向左平移.)

3. 抛物线$y=ax^2+k$有如下特点:

(1) 当$a>0$时, 开口向上,当$a<0$时,开口向下;

(2) 对称轴是y轴;　　(3) 顶点是$(0,k)$.

抛物线$y=a(x-h)^2$有如下特点:

(1) 当$a>0$时, 开口向上,当$a<0$时,开口向上;

(2) 对称轴是$x=h$;　　(3) 顶点是$(h,0)$.

再见