

22.1.3.3 二次函数

$y=a(x-h)^2+k$ 的图象及其性质

复习回顾:

1. 填表

抛物线 开口方向 对称轴 顶点坐标

$$y = -0.5x^2$$

向下

$$x=0$$

(0, 0)

$$y = -0.5x^2 + 1$$

向下

$$x=0$$

(0, 1)

$$y = -0.5x^2 - 1$$

向下

$$x=0$$

(0, -1)

$$y = 2x^2$$

向上

$$x=0$$

(0, 0)

$$y = 2(x-1)^2$$

向上

$$x=1$$

(1, 0)

$$y = 2(x+1)^2$$

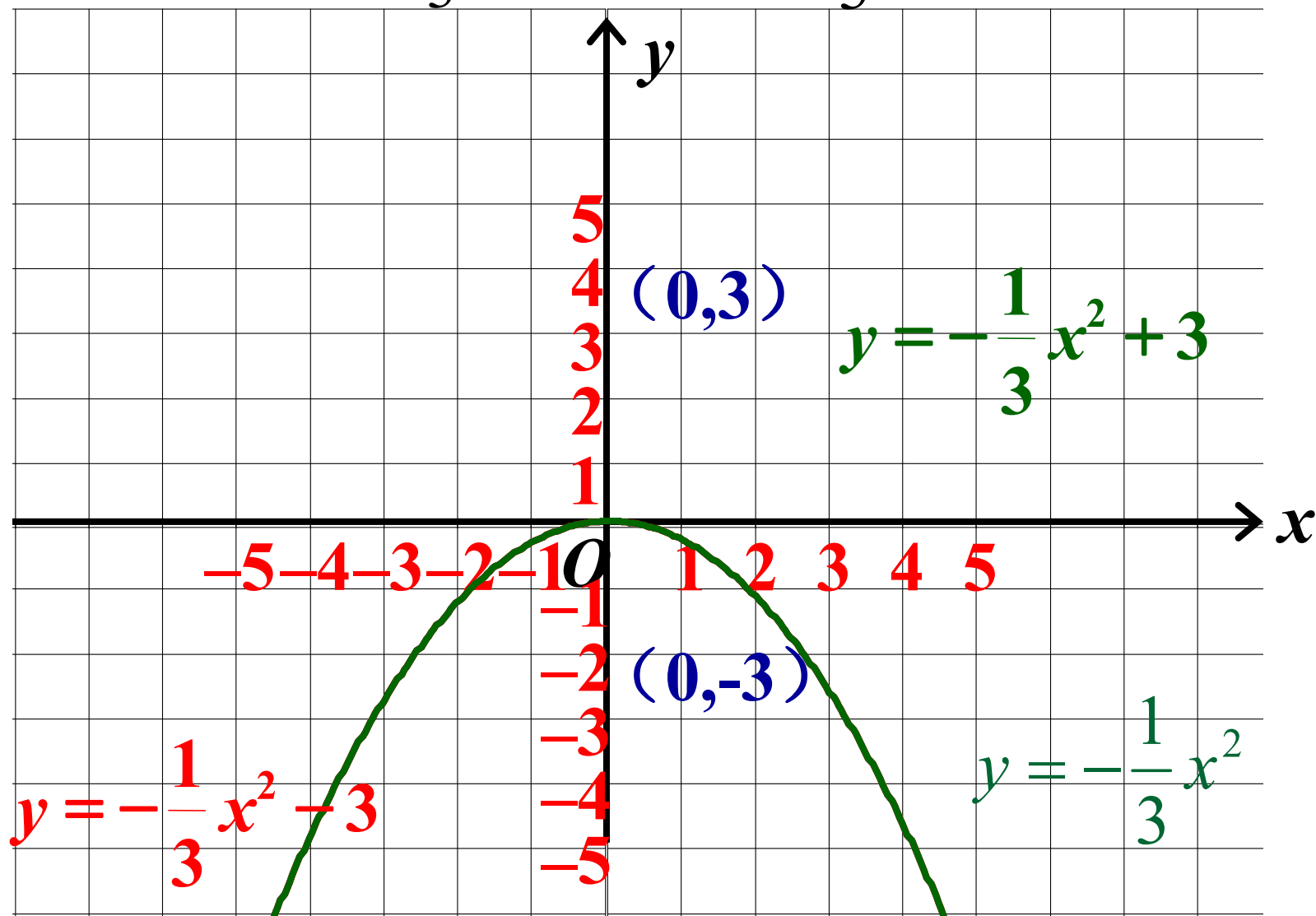
向上

$$x = -1$$

(-1, 0)

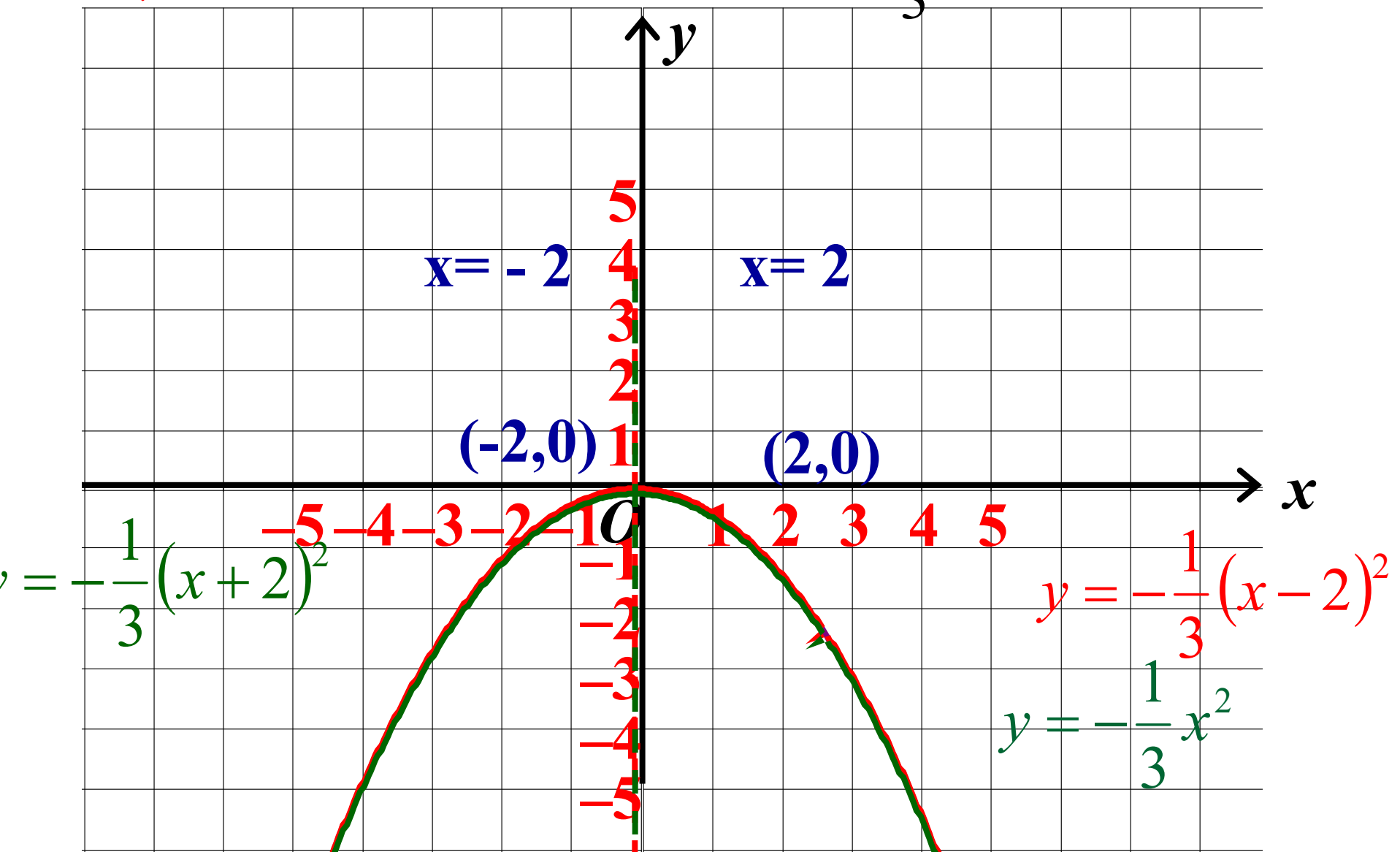
2. 上下 平移

如何由 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 的图象得到
 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3$ 、 $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ 的图象。



3. 左右 平移

如何由 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 的图象得到 $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2$ 、
 $y = -\frac{1}{3}(x+2)^2$ 的图象。



4. 上下平移规律

$$y=ax^2 \xrightarrow[\text{当 } c < 0 \text{ 时, 向下平移 } |c| \text{ 个单位}]{\text{当 } c > 0 \text{ 时, 向上平移 } c \text{ 个单位}} y = ax^2 + c$$

左右平移规律

$$y=ax^2 \xrightarrow[\text{当 } h < 0 \text{ 时, 向左平移 } |h| \text{ 个单位}]{\text{当 } h > 0 \text{ 时, 向右平移 } h \text{ 个单位}} y = a(x-h)^2$$

5.二次函数 $y=ax^2$ 的图象和性质

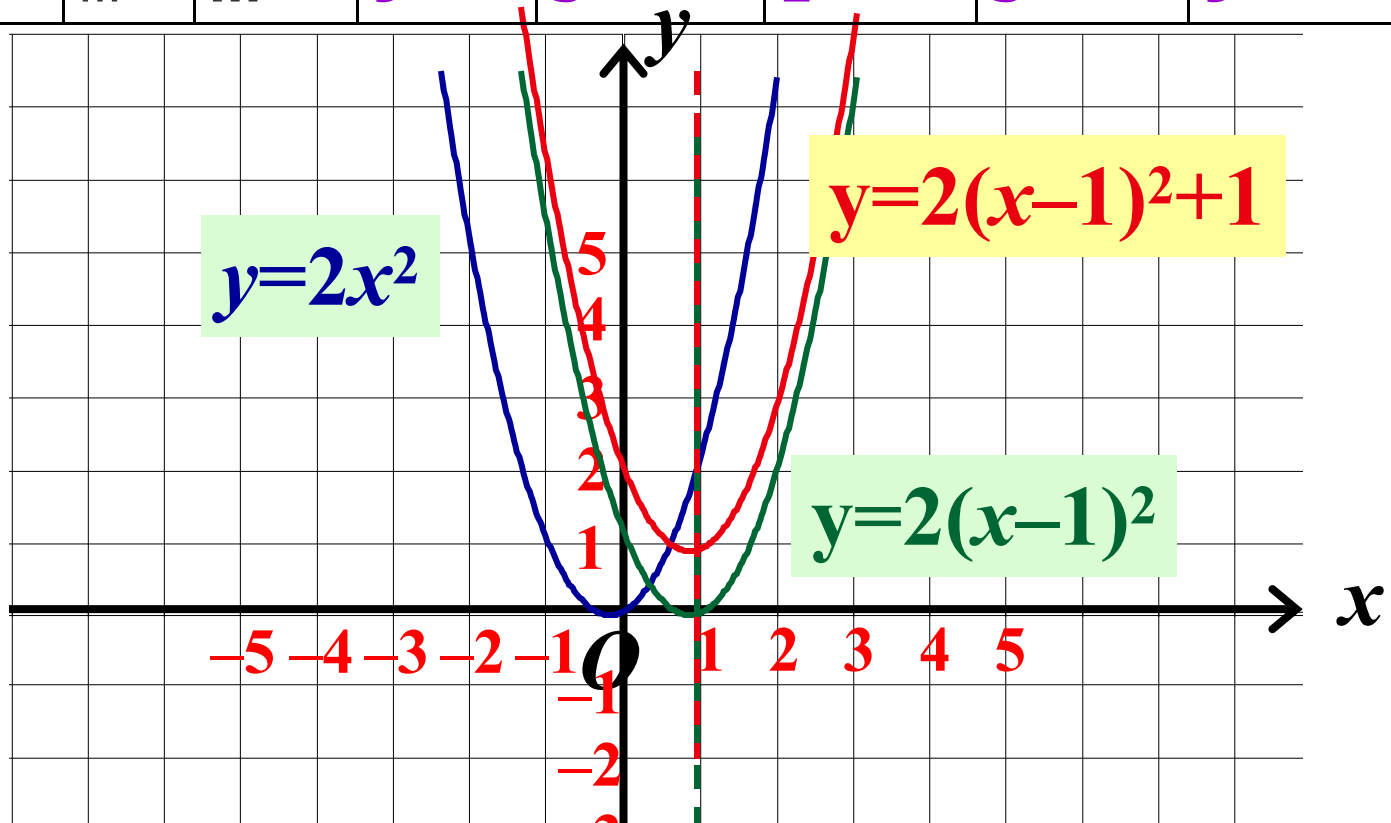
抛物线	$y=ax^2(a>0)$	$y=ax^2(a<0)$
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=0$	直线 $x=0$
顶点坐标	$(0, 0)$	$(0, 0)$
增减性	在对称轴的左侧,y随着x的增大而减小. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而增大.	在对称轴的左侧,y随着x的增大而增大. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而减小.
最值	当 $x=0$ 时,最小值为0.	当 $x=0$ 时,最大值为0.

6.二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图象和性质

抛物线	$y=a(x-h)^2$ ($a>0$)	$y=a(x-h)^2$ ($a<0$)
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=h$	直线 $x=h$
顶点坐标	$(h, 0)$	$(h, 0)$
增减性	在对称轴的左侧,y随着x的增大而减小. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而增大.	在对称轴的左侧,y随着x的增大而增大. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而减小.
最值	当 $x=h$ 时,最小值为0.	当 $x=h$ 时,最大值为0.


在同一坐标系内画出 $y=2x^2$ 、 $y=2(x-1)^2$ 、 $y=2(x-1)^2+1$ 的图象

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x^2$...	8	2	0	2	8	...
$y=2(x-1)^2$	8	2	0	2	8
$y=2(x-1)^2+1$	9	3	1	3	9



$$y = 2x^2$$

向上
平移
一个
单位



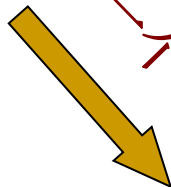
$$y = 2x^2 + 1$$

向右平移
一个单位



$$y = 2(x-1)^2$$

向右平移
一个单位



$$y = 2(x-1)^2 + 1$$

向上平移
一个单位



$y = 2(x-1)^2 + 1$ 的图像可以由 $y = 2x^2$ 先向上平移一个单位,

再向右平移一个单位,或者先向右平移一个单位再向上
平移一个单位而得到.

平移的规律总结:

$$y=ax^2 \xrightarrow{\begin{array}{l} \text{当 } h>0 \text{ 时, 向右平移 } h \text{ 个单位} \\ \text{当 } h<0 \text{ 时, 向左平移 } |h| \text{ 个单位} \end{array}} y=a(x-h)^2$$
$$\xrightarrow{\begin{array}{l} \text{当 } k>0 \text{ 时, 向上平移 } k \text{ 个单位} \\ \text{当 } k<0 \text{ 时, 向下平移 } |k| \text{ 个单位} \end{array}} y=a(x-h)^2+k$$

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2 \quad x = -2$$

观察 $y = \frac{1}{2}x^2$

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$$

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$$

的图像

$(-2, 2)$

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

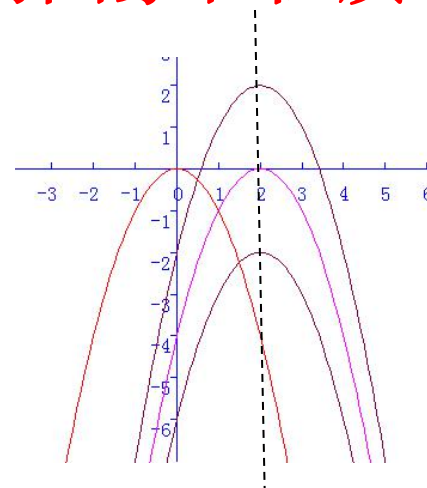
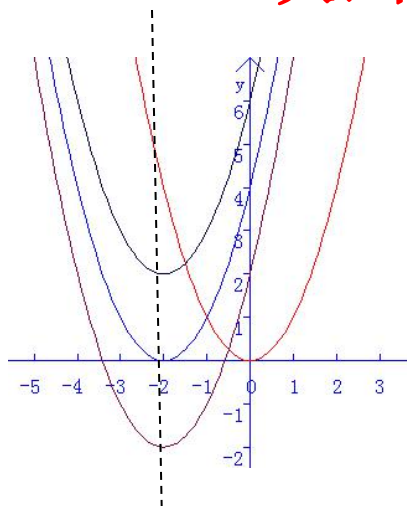
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$$

$(-2, -3)$

抛物线	$y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 + 2$	$y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 - 3$
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=-2$	直线 $x=2$
顶点坐标	$(-2, 2)$	$(2, -3)$
增减性	在对称轴的左侧,y随着x的增大而减小. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而增大.	在对称轴的左侧,y随着x的增大而增大. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而减小.
最值	当 $x=-2$ 时, 最小值为2	当 $x=2$ 时, 最大值为-3

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象和性质



抛物线	$y=a(x-h)^2+k(a>0)$	$y=a(x-h)^2+k(a<0)$
开口方向	向上	向下
对称轴	直线 $x=h$	直线 $x=h$
顶点坐标	(h, k)	(h, k)
增减性	在对称轴的左侧,y随着x的增大而减小. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而增大.	在对称轴的左侧,y随着x的增大而增大. 在对称轴的右侧,y随着x的增大而减小.
最值	当 $x=h$ 时,最小值为k.	当 $x=h$ 时,最大值为k.

指出下列函数图象的开口方向, 对称轴和顶点坐标.

	开口	对称轴	顶点坐标
(1) $y = 2(x - 3)^2 - 5$	向上	直线 $x=3$	$(3, -5)$
(2) $y = -0.5(x + 1)^2$	向下	直线 $x = -1$	$(-1, 0)$
(3) $y = -\frac{3}{4}x^2 - 1$	向下	直线 $x=0$	$(0, -1)$
(4) $y = 2(x - 2)^2 + 5$	向上	直线 $x=2$	$(2, 5)$
(5) $y = 0.5(x + 4)^2 + 2$	向上	直线 $x = -4$	$(-4, 2)$
(6) $y = -\frac{3}{4}(x - 3)^2$	向下	直线 $x=3$	$(3, 0)$

考考你学的怎么样：

1. 抛物线的上下平移

(1) 把二次函数 $y=(x+1)^2$ 的图像，沿 y 轴向上平移3个单位，得到 $y=(x+1)^2+3$ 的图像；

(2) 把二次函数 $y=x^2+3$ 的图像，沿 y 轴向下平移2个单位，得到 $y=x^2+1$ 的图像。

2. 抛物线的左右平移

(1) 把二次函数 $y=(x+1)^2$ 的图像，沿 x 轴向左平移3个单位，得到 $y=(x+4)^2$ 的图像；

(2) 把二次函数 $y=(x+2)^2+1$ 的图像，沿 x 轴向右平移2个单位，得到 $y=x^2+1$ 的图像。

3. 抛物线的平移:

(1) 把二次函数 $y=3x^2$ 的图像,
先沿 x 轴向左平移3个单位,
再沿 y 轴向下平移2个单位,
得到 $y=3(x+3)^2-2$ 的图像;

(2) 把二次函数 $y=-3(x+6)^2$ 的图像,
先沿 y 轴向下平移2个单位,
再沿 x 轴向右平移3个单位,
得到 $y=-3(x+3)^2-2$ 的图像.

4. 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 的顶点坐标是 **$(-1,0)$** ;

5. 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ 向上平移3个单位后,
顶点的坐标是 **$(-1,3)$** ;

6. 抛物线 $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 + 3$ 的对称轴是 **$x=-1$** .

7. 把二次函数 $y=4(x-1)^2$ 的图像, 沿 x 轴向右平移2个单位, 得到图像的对称轴是直线 $x=3$.

8. 把抛物线 $y=-3(x+2)^2$, 先沿 x 轴向右平移2个单位, 再沿 y 轴向下平移1个单位, 得到 $y=-3x^2-1$ 的图像.

9. 把二次函数 $y=-2x^2$ 的图像, 先沿 x 轴向左平移3个单位, 再沿 y 轴向下平移2个单位, 得到图像的顶点坐标是 $(-3,-2)$.

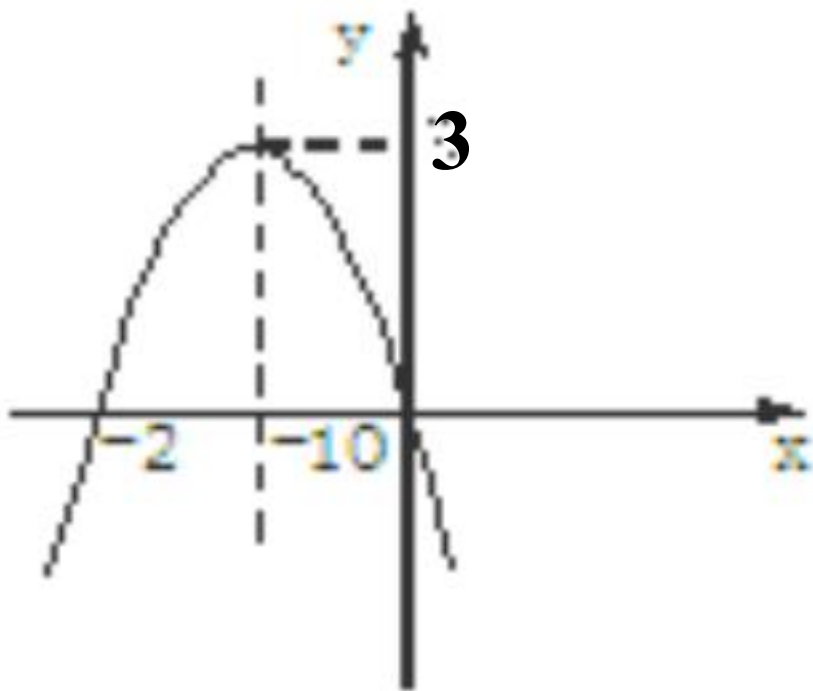
10.如图所示的抛物线:

当 $x = \underline{0 \text{ 或 } -2}$ 时, $y = 0$;

当 $x < -2$ 或 $x > 0$ 时, $y < 0$;

当 x 在 $\underline{-2 < x < 0}$ 范围内时, $y > 0$;

当 $x = \underline{-1}$ 时, y 有最大值 $\underline{3}$.



11、试分别说明将抛物线的图象通过怎样的平移得到 $y=x^2$ 的图象：

(1) $y=(x-3)^2+2$;

先向左平移3个单位，再向下平移2个单位

(2) $y=(x+4)^2-5$

先向右平移4个单位，再向上平移5个单位

12.与抛物线 $y=-4x^2$ 形状相同，顶点为 $(2, -3)$ 的抛物线解析式

为 $y= -4(x-2)^2-3$ 或 $y= 4(x-2)^2-3$

13. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示

(1) 求解析式

解: \because 二次函数图象的顶点是 $(1,-1)$,

\therefore 设抛物线解析式是 $y=a(x-1)^2-1$,

\because 其图象过点 $(0,0)$,

$\therefore 0 = a(0-1)^2-1$,

$\therefore a=1$

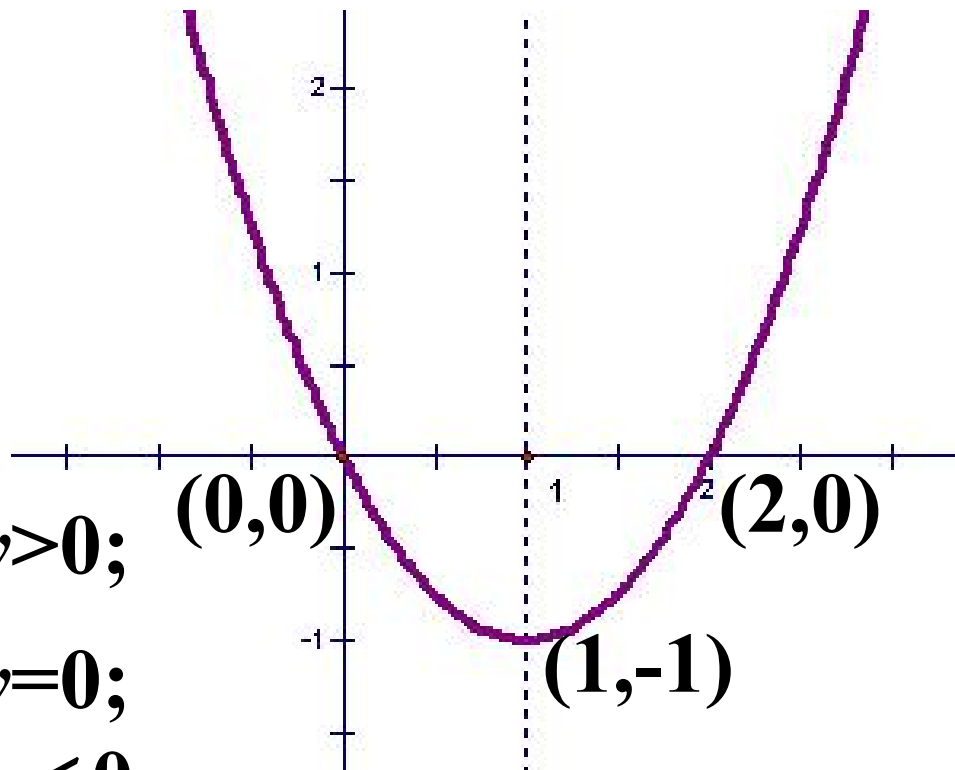
$\therefore y = (x-1)^2-1$

(2) 根据图象回答:

当 x $x < 0$ 或 $x > 2$ 时, $y > 0$;

当 x $x = 0$ 或 2 时, $y = 0$;

当 x $0 < x < 2$ 时, $y < 0$ 。



下课了!

