

人教版九年级数学上册

第二十五章 概率初步

25.3 用频率估计概率



复习 一、等可能性事件

1. 试验的所有可能结果只有 有限 个；
2. 每一个试验结果出现的可能性 相等。

二、求等可能性事件概率的方法：

如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

归纳 列举法求事件的概率

- (1)事件结果显而易见，可能性较少，可用直接列举法
- (2)涉及两个因素，可能出现的结果较多，可用列表法或画树形图法
- (3)涉及三个或以上的因素，事件结果较复杂，步骤较多，可用画树形图法
- (4)对于不可放回事件的概率，用画树形图法较方便。

复习

1、有三枚硬币，硬币1的一面涂有红色，另一面涂有黄色；硬币2的一面涂有黄色，另一面涂有蓝色；硬币3的一面涂有蓝色，另一面涂有红色。现将这三枚硬币随意抛出，求两枚的颜色相同的概率。

用什么方法求概率？

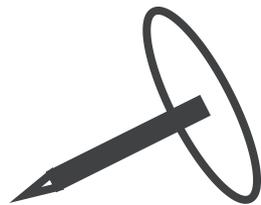
导入

※、如图，有一枚图钉，将它抛出后，要考察钉尖的朝向上的概率。

(1)钉尖的朝向有几种可能的结果？



钉尖朝上



钉尖朝上

(2)这两种结果可能性相等吗？

这两种结果可能性不相等。

导入

※、某林业部门要考察某种幼树在一定条件的移植成活的概率。

(1)可能的结果有多少种？

可能的结果有两种。

(2)这两种结果可能性相等吗？

这两种结果可能性不相等。

在同样条件下，随机事件可能发生，也可能不发生，那么它发生的可能性有多大呢？这是我们下面要讨论的问题。

我们从抛掷硬币这个简单问题说起，抛掷一枚质地均匀的硬币时，“正面向上”和“反面向上”发生的可能性相等，这两个随机事件发生的概率都是**0.5**，那么这是否意味着抛掷一枚硬币**100**次时，就会有**50**次“正面向上”和**50**次“反面向上”呢？

不妨用试验进行检验

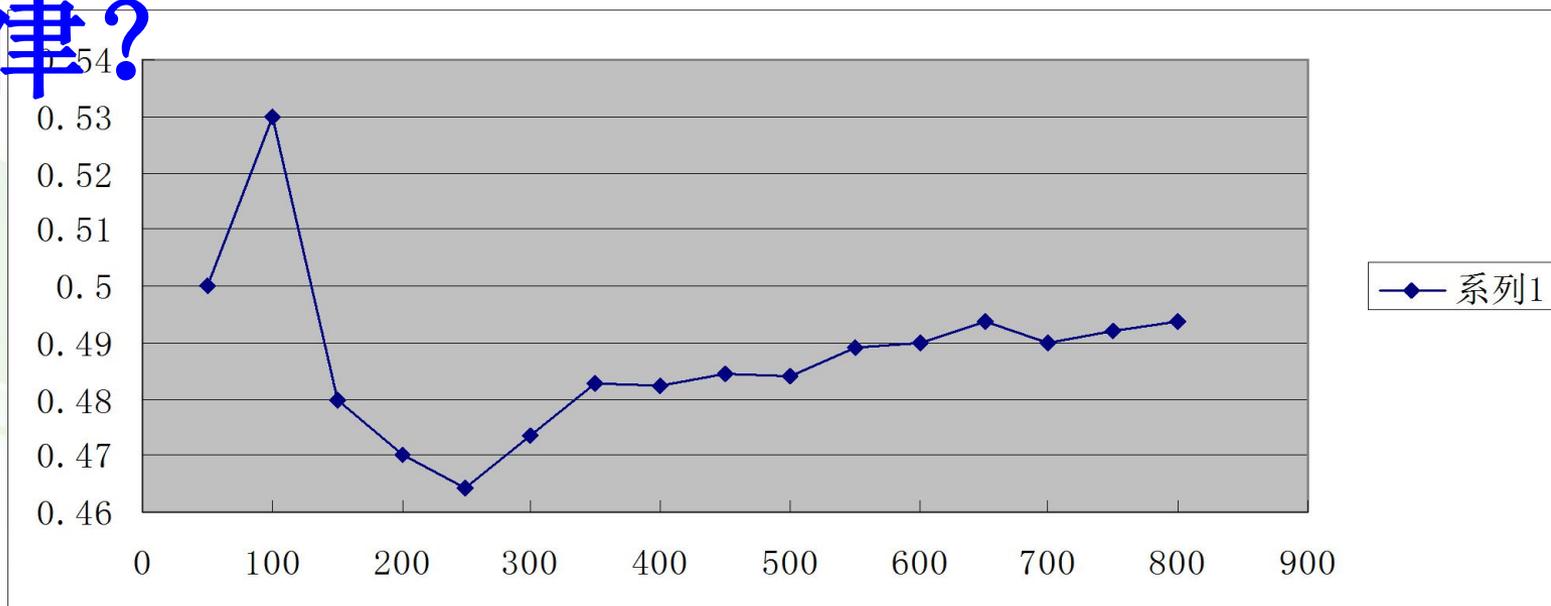


试验

把全班同学分成10组，每组同学掷一枚硬币50次，把本组的试验数据进行统计，“正面向上”和“反面向上”的**频数**和**频率**分别是多少？

总数	50	100	150	200	250	300	350	400
正面	25	53	72	94	116	142	169	193
频率	0.5	0.53	0.48	0.47	0.46	0.47	0.48	0.48

请同学们根据试验所得数据想一想：“正面向上”的频率有什么规律？



在多次试验中，某个事件出现的次数叫**频数**，某个事件出现的次数与试验总次数的比，叫做这个事件出现的**频率**。

频数： 在实验中,每个对象出现的次数称为频数,

频率： 所考察对象出现的次数与实验的总次数的比叫做频率

$$\text{频率} = \frac{\text{频数}}{\text{总数}}$$

概率： 事件发生的可能性,也称为事件发生的概率.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

m \longrightarrow A可能发生的情况
 n \longrightarrow 可能发生的总情况

做抛硬币的实验：当抛一枚硬币时会出现几种结果？

2种 其中正面朝上的概率是多少？0.5 无论抛多少次，正面朝上的概率会不会改变？不变

若抛10次，其中4次正面朝上，则正面朝上的频率是多少？~~0.4~~ 如果有5次正面向上呢？~~0.5~~
频率是否会改变？会改变

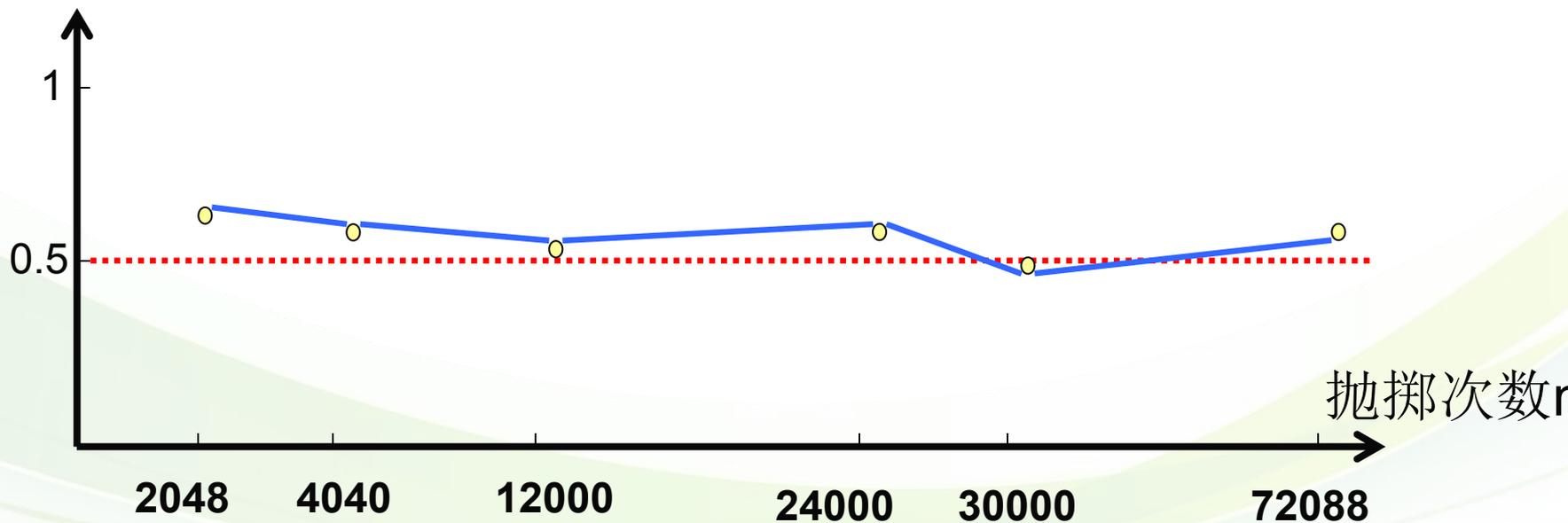
这就是说同次试验的频率和概率是否相同？

有时相同，有时不相同

历史上曾有人作过抛掷硬币的大量重复实验，
结果如下表所示

抛掷次数 (n)	2048	4040	12000	30000	24000	72088
正面朝上数(m)	1061	2048	6019	14984	12012	36124
频率(m/n)	0.518	0.506	0.501	0.4996	0.5005	0.5011

频率m/n



实验结论：当抛硬币的次数很多时，出现下面的频率值是稳定的，接近于常数0.5，在它附近摆动。

我们发现，随着抛掷次数的增加，频率呈现出一定的稳定性：在0.5附近摆动的幅度会越来越小。这时，我们称“正面向上”的频率稳定于0.5. 它与前面用列举法得出的“正面向上”的概率是同一个数值。

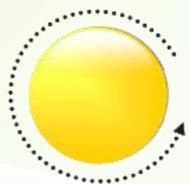
因此我们说：随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生呈现出一定的规律性。出现的频率值接近于常数。

实际上从长期的实践中，人们观察到，对一般的随机事件，在做**大量重复试验**时，随着试验次数的增加，一个事件出现的**频率**，总在**一个固定数值**的附近摆动，显示出一定的稳定性。

因此，我们可以通过大量的重复试验，**用**一个随机事件发生的**频率去估计它的概率**。



雅各布·伯努利（1654-1705），被公认是概率论的先驱之一，他最早阐明了随着实验次数的增加，**频率稳定在概率附近**。



归纳：

一般地, 在大量重复试验中, 如果事件 A

发生的频率 $\frac{m}{n}$ 稳定于某个常数 p ,

那么事件 A 发生的概率

$$P(A) = p$$

随机事件及其概率

事件 A 的概率的定义:

一般地, 在大量重复进行同一试验时, 事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ (n 为实验的次数, m 是事件发生的频数) 总是接近于某个常数, 在它附近摆动, 这时就把这个常数叫做事件 A 的概率, 记做 $P(A) = p$.

由定义可知:

(1) 求一个事件的概率的基本方法是通过大量的重复试验;

(2) 只有当频率在某个常数附近摆动时, 这个常数才叫做事件A的概率;

(3) 概率是频率的**稳定值**, 而频率是概率的**近似值**;

(4) 概率反映了随机事件发生的**可能性**的大小;

(5) 必然事件的概率为**1**, 不可能事件的概率为**0**. 因此 $0 \leq P(A) \leq 1$.

可以看到事件发生的可能性越大**概率就越接近1**；
反之，事件发生的可能性越小**概率就越接近0**

总结

弄清了一种关系-----频率与概率的关系

当试验次数很多或试验时样本容量足够大时, 一事件发生的**频率**与相应的**概率**会非常接近. 此时, 我们可以用一事件发生的**频率**来估计这一事件发生的**概率**.

了解了一种方法--用多次试验所得的频率去估计概率

体会了一种思想: 用样本去估计总体
 用频率去估计概率

随机事件及其概率

某批乒乓球产品质量检查结果表：

优等品数	m	45	92	194	470	954	1902
抽取球数	n	50	100	200	500	1000	2000
优等品频率	$\frac{m}{n}$	0.9	0.92	0.97	0.94	0.954	0.951

当抽查的球数**很多**时，抽到优等品的频率 $\frac{m}{n}$ 接近于**常数**0.95，在它附近摆动。

某种油菜籽在相同条件下的发芽试验结果表：

每批粒数 n	2	5	10	70	130	310	700	1 500	2 000	3 000
发芽的粒数 m	2	4	9	60	116	282	639	1 339	1 806	2 715
发芽的频率 $\frac{m}{n}$	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

当试验的油菜籽的粒数**很多**时，油菜籽发芽

的频率 $\frac{m}{n}$ 接近于**常数**0.9，在它附近摆动。

例 1：对一批衬衫进行抽查，结果如下表：

抽取件数 n	50	100	200	500	800	1000
优等品件数 m	42	88	176	445	724	901
优等品频率 m/n	0.84	0.88	0.88	0.89	0.905	0.901

求抽取一件衬衫是优等品的概率约是多少？
抽取衬衫2000件，约有优质品几件？

例 2 填表

某射手进行射击，结果如下表所示：

射击次数n	20	100	200	500	800
击中靶心次数m	13	58	104	255	404
击中靶心频率m/n	0.65	0.58	0.52	0.51	0.55

(1)这个射手射击一次，击中靶心的概率是多少？

(2)这射手射击1600次，击中靶心的次数是800。



试一试



1. 一水塘里有鲤鱼、鲫鱼、鲢鱼共1 000尾，一渔民通过多次捕获实验后发现：鲤鱼、鲫鱼出现的频率是31%和42%，则这个水塘里有鲤鱼310尾，鲢鱼270尾.



估计移植成活率

是实际问题中的一种概率,可理解为成活的概率。

某观察者在多次试验中得到的移植成活率逐渐应如何看其具体做法?

移植总数 (n)	成活数 (m)	成活的频率 ($\frac{m}{n}$)
10	8	0.8
50	47	0.94
270	235	0.870
400	369	0.923
750	662	0.883
1500	1335	0.890
3500	3203	0.915
7000	6335	0.905
9000	8073	0.897
14000	12628	0.902



估计移植成活率

由下表可以发现，幼树移植成活的频率在 0.9 左右摆动，并且随着移植棵数越来越大，这种规律愈加明显。

所以估计幼树移植成活的概率为 0.9。

移植总数 (n)	成活数 (m)	成活的频率 ($\frac{m}{n}$)
10	8	0.8
<p>1. 林业部门种植了该幼树1000棵, 估计能成活 <u>900</u> 棵.</p> <p>2. 我们学校需种植这样的树苗500棵来绿化校园, 则至少向林业部门购买约 <u>556</u> 棵.</p>		
1500	1335	0.890
3500	3203	0.915
7000	6335	0.905
9000	8073	0.897
14000	12628	0.902



共同练习

观察分析下表,利用你得到的结论解答下列问题:

柑橘总质量 (n) /千克	损坏柑橘质量 (m) /千克	柑橘损坏的频率 ($\frac{m}{n}$)
50	5.50	0.110
100	10.5	0.105
150	15.15	0.101
200	19.42	0.097
250	24.25	0.097
300	30.93	0.103
350	35.32	0.101
400	39.24	0.098
450	44.57	0.099
500	51.54	0.103

某水果公司以2元/千克的成本新进了10 000千克柑橘,如果公司希望这些柑橘能够获得利润5 000元,那么在出售柑橘(已去掉损坏的柑橘)时,每千克大约定价为多少元比较合适?

思 考

柑橘总质量 (n) /千克	损坏柑橘质量 (m) /千克	柑橘损坏的频率 ($\frac{m}{n}$)
50	5.50	0.110
100	10.5	0.105
150	15.15	0.101
200	19.42	0.097
250	24.25	0.097
300	30.93	0.103
350	35.32	0.101
400	39.24	0.098
450	44.57	0.099
500	51.54	0.103

从表可以看出，柑橘损坏的频率在常数 0.1 左右摆动，并且随统计量的增加这种规律逐渐 稳定，那么可以把柑橘损坏的概率估计为这个常数。如果估计这个概率为0.1，则柑橘完好的概率为 0.9。

根据估计的概率可以知道，在10 000千克柑橘中完好柑橘的质量为
 $10\ 000 \times 0.9 = 9\ 000$ 千克，完好柑橘的实际成本为

$$\frac{2 \times 10000}{9000} = \frac{2}{0.9} \approx 2.22(\text{元/千克})$$

设每千克柑橘的销价为 x 元，则应有 $(x - 2.22) \times 9\ 000 = 5\ 000$

解得 $x \approx 2.8$

因此，出售柑橘时每千克大约定价为2.8元可获利润5 000元。

共同练习

观察分析下表,利用你得到的结论解答下列问题:

柑橘总质量 (n) /千克	损坏柑橘质量 (m) /千克	柑橘损坏的频率 ($\frac{m}{n}$)			
50	5.50	0.110			
100	10.5	0.105			
150	15.15	0.101			
为简单起见,我们能否直接把表中的500千克柑橘对应的柑橘损坏的频率看作柑橘损坏的概率?					
			400	39.24	0.098
			450	44.57	0.099
			500	51.54	0.103

根据频率稳定性定理,在要求精确度不是很高的情况下,不妨用表中试验次数最多一次的频率近似地作为事件发生概率的估计值.



为简单起见，我们能否直接把表中500千克柑橘对应的柑橘损坏的频率看作柑橘损坏的频率看作柑橘损坏的概率？

应该可以的

因为500千克柑橘损坏51.54千克，损坏率是0.103，可以近似的估算是柑橘的损坏概率

频率与概率的异同

- 事件发生的概率是一个定值。
- 而事件发生的频率是波动的，与试验次数有关。
- 当试验次数不大时，事件发生的频率与概率的偏差甚至会很大。
- 只有通过大量试验，当试验频率区趋于稳定，才能用事件发生的频率来估计概率。

练习

某农科所在相同条件下做了某作物种子发芽率的实验，结果如下表所示：

种子个数	发芽种子个数	发芽种子频率
100	94	0.94
200	187	0.94
300	282	0.94
400	338	0.96
500	435	0.87
600	530	0.89
700	624	0.89
800	718	0.9
900	814	0.9
1000	981	0.98

一般地，1 000千克种子中大约有多少是不能发芽的？

种子个数	发芽种子个数	发芽种子频率
100	94	0.94
200	187	0.94
300	282	0.94
400	338	0.96
500	435	0.87
600	530	0.89
700	624	0.89
800	718	0.9
900	814	0.9
1000	981	0.98

一般地，1 000千克种子中大约有多少是不能发芽的？

解答:这批种子的发芽的频率稳定在0.9即种子发芽的概率为90%，不发芽的概率为0.1,机不发芽率为10%

所以： $1000 \times 10\% = 100$ 千克

1000千克种子大约有100千克是不能发芽的。

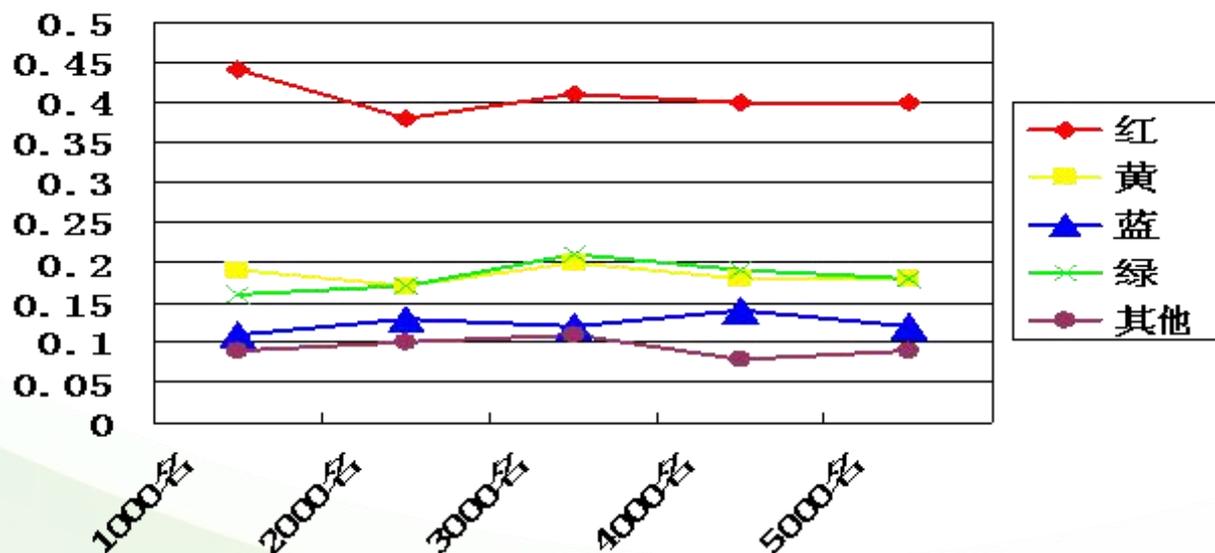
上面两个问题,都不属于结果可能性相等的类型.移植中有两种情况活或死.它们的可能性并不相等,事件发生的概率并不都为50%.柑橘是好的还是坏的两种事件发生的概率也不相等.因此也不能简单的用50%来表示它发生的概率.

◆当试验次数很大时,一个事件发生频率也稳定在相应的概率附近.因此,我们可以通过多次试验,用一个事件发生的频率来估计这一事件发生的概率.

在相同情况下随机的抽取若干个体进行实验,进行实验统计.并计算事件发生的频率 $\frac{m}{n}$
根据频率估计该事件发生的概率.

做一做：

1. 某厂打算生产一种中学生使用的笔袋，但无法确定各种颜色的产量，于是该文具厂就笔袋的颜色随机调查了5000名中学生，并在调查到1000名、2000名、3000名、4000名、5000名时分别计算了各种颜色的频率，绘制折线图如下：



- (1) 随着调查次数的增加，红色的频率如何变化？
(2) 你能估计调查到10 000名同学时，红色的频率是多少吗？
(3) 若你是该厂的负责人，你将如何安排生产各种颜色的产量？
- 随着调查次数的增加，红色的频率基本稳定在40%左右。
红、黄、蓝、绿及其它颜色的生产比例大约为4:2:1:2:1。
估计调查到10 000名同学时，红色的频率大约仍是40%左右。

2. 对某电视机厂生产的电视机进行抽样检测的数据如下：

抽取台数	50	100	200	300	500	1000
优等品数	40	92	192	285	478	954

- (1) 计算表中优等品的各个频率；
- (2) 该厂生产的电视机优等品的概率是多少？

解决问题

姚明在最近几场比赛中罚球投篮的结果如下：

投篮次数	8	6	9	12	20
进球次数	7	5	9	11	18
进球频率	0.875	0.83	1.0	0.92	0.9

- (1) 计算表中进球的频率；
- (2) 思考：姚明罚球一次，进球的概率有多大？
- (3) 计算：姚明在接下来的比赛中如果将要罚球**15**次，试估计他能进多少个球？
- (4) 设想：如果你是火箭队的主教练，你该如何利用姚明在罚球上的技术特点呢？



试一试

一批西装质量抽检情况如下：

抽检件数	200	400	600	800	1000	1200
正品件数	190	390	576	773	967	1160
次品的频率	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{27}{800}$	$\frac{33}{1000}$	$\frac{1}{30}$

(1) 填写表格中次品的频率.

(2) 从这批西装中任选一套是次品的概率是多少?
 $\frac{1}{30}$

(3) 若要销售这批西装2000件, 为了方便购买次品西装的顾客前来调换, 至少应该进多少件西装?
2069



小结

1. 随机事件的概念

在一定条件下可能发生也可能不发生的事件，叫做随机事件。

2. 随机事件的概率的定义

在大量重复进行同一试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ 总是接近于某个常数，在它附近摆动，这时就把这个常数叫做事件 A 的概率。

$$0 \leq P(A) \leq 1$$