

# 第十二章 分式和分式方程

## 12.4 分式方程

导入新课



讲授新课



当堂练习



课堂小结



## 学习目标

- 1.理解分式方程的意义，掌握解分式方程的基本思路和解法.（难点）
- 2.理解分式方程无解及出现增根的原因，掌握分式方程验根的方法.（重点）

## 复习引入

1. 什么叫一元一次方程？

2. 下列方程哪些是一元一次方程？

(1)  $3x - 5 = 3$ ;

(2)  $x + 2y = 5$ ;

(3)  $x^2 - x = 5$ ;

(4)  $\frac{x}{2} - \frac{x+1}{3} = 1$ .

## 一 分式方程的相关概念

**问题** 一艘轮船在静水中的最大航速为20千米/时,它沿江以最大航速顺流航行100千米所用时间,与以最大航速逆流航行60千米所用时间相等,江水的流速为多少?

**解:** 设江水的流速为  $v$  千米/时, 根据题意, 得

$$\frac{100}{20+v} = \frac{60}{20-v}.$$

分母中含未知数的方程叫做分式方程.

## ◆分式方程的概念

分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

## ◆分式方程的特征

- (1) 是等式;
- (2) 方程中含有分母;
- (3) 分母中含有未知数.

## 练一练

下列方程中，哪些是**分式方程**？哪些**整式方程**。

$$(1) \frac{x-2}{2} = \frac{x}{3};$$

$$(2) \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 7;$$

$$(3) \frac{1}{x-2} = \frac{3}{x};$$

$$(4) \frac{x(x-1)}{x} = -1;$$

$$(5) \frac{3-x}{\pi} = \frac{x}{2};$$

$$(6) 2x + \frac{x-1}{5} = 10$$

$$(7) x - \frac{1}{x} = 2;$$

$$(8) \frac{2x+1}{x} + 3x = 1.$$



## 分式方程的解法

想一想 下面我们一起来研究下怎么样来解分式方程：

$$\frac{100}{20+v} = \frac{60}{20-v}$$

方程两边同乘以  $(20+v)(20-v)$ ，得：

$$100(20-v) = 60(20+v),$$

$$\text{解得： } v = 5.$$

检验：将  $v=5$  代入分式方程，左边=4=右边， $\therefore v=5$  是原分式方程的解.

## ◆分式方程的解

使得分式方程等号两端相等的未知数的值叫做分式方程的解（也叫做分式方程的根）。

## ◆解分式方程的步骤

- （1）去分母，在方程的两边同时乘以最简公分母，把分式方法转化为整式方程；
- （2）解这个整式方程；
- （3）检验，把一元一次方程的根代入所乘的最简公分母中，看结果是否为0；
- （4）写出是原分式方程的解。



## 分式方程的增根

问题 解分式方程：
$$\frac{1}{x-5} = \frac{10}{x^2-25}.$$

解：方程两边同乘以最简公分母  $(x-5)(x+5)$ ，得

$$x+5=10,$$

解得： $x=5.$

为什么会产  
生增根？

检验：将 $x=5$ 代入原分式方程，发现这时 $x-5$ 和 $x^2-25$ 的值都为0，相应分式无意义.所以 $x=5$ 不是原分式方程的解.

原分式方程无解.

## ◆分式方程的增根

在去分母, 将分式方程转化为整式方程的过程中出现的不适合于原方程的根.

## ◆分式方程产生增根的原因

分式方程两边同乘以一个零因式后, 所得的根是整式方程的根, 而不是分式方程的根.

## 当堂练习

1.解方程:  $\frac{1}{x-2} = \frac{3}{x}$ .

解: 方程两边都乘以  $x(x-2)$ , 得:

$$x = 3(x - 2),$$

解这个方程, 得:  $x = 3$ .

检验: 将  $x = 3$  代入原方程, 得:

$$\text{左边} = 1 = \text{右边}.$$

所以:  $x=3$  是原方程的根.

2.解方程：
$$\frac{x}{x-5} = \frac{-5}{5-x}.$$

解： 方程两边都乘以  $x-5$  ，得：

解这个方程，得： $x = 5.$

检验：将  $x = 5$  代入原方程，方程的分母为零.

所以， $x = 5$  是方程的增根，原方程无实根 .

3.当 $m$ 为何值时, 方程  $\frac{x}{x-3} - 2 = \frac{m}{x-3}$  会产生增根.

解: 方程两边同乘以最简公分母  $(x-3)$ , 得

$$x-2(x-3)=m,$$

$$x-2x+6=m,$$

解方程, 得  $x=6-m$ .

因为原分式方程有增根, 所以 $x=3$ .

得  $6-m=3$ , 即  $m=3$ .

### ◆分式方程的概念

分母中含有未知数的方程叫做分式方程.

### ◆解分式方程的步骤

- (1) 去分母，在方程的两边同时乘以最简公分母，把分式方法转化为整式方程；
- (2) 解这个整式方程；
- (3) 检验，把一元一次方程的根代入所乘的最简公分母中，看结果是否为0；
- (4) 写出是原分式方程的解.

### ◆分式方程的增根

在去分母, 将分式方程转化为整式方程的过程中出现的不适合于原方程的根.

见《学练优》本课时练习