第十六章 轴对称和中心对称

16.3 角的平分线

导入新课　讲授新课　当堂练习　课堂小结

学习目标

1.理解并掌握角平分线的性质定理及其逆定理. （难点）

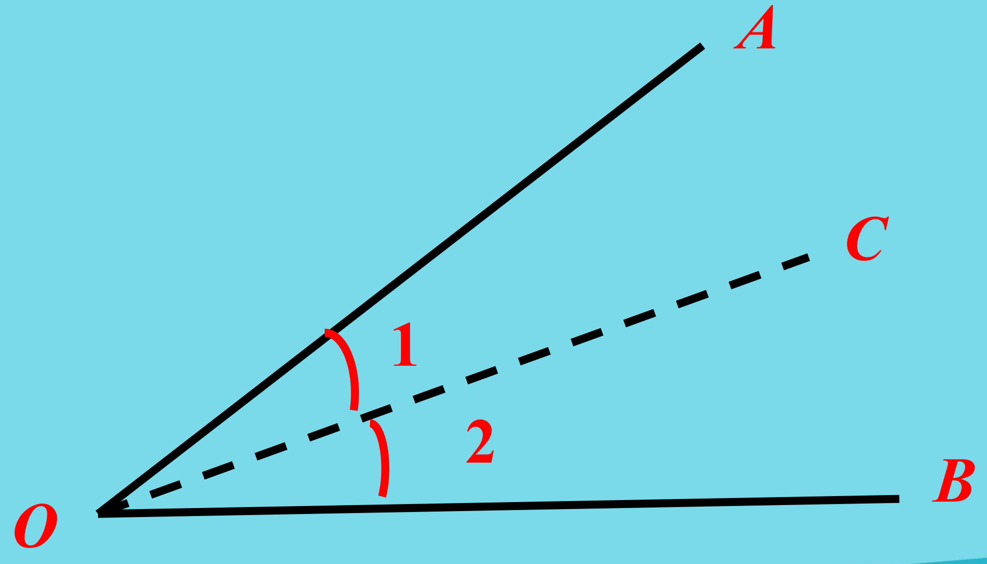
2.能利用角平分线的性质定理及其逆定理证明相关结论并应用.（重点）

3.能利用尺规作出一个已知角的角平分线.

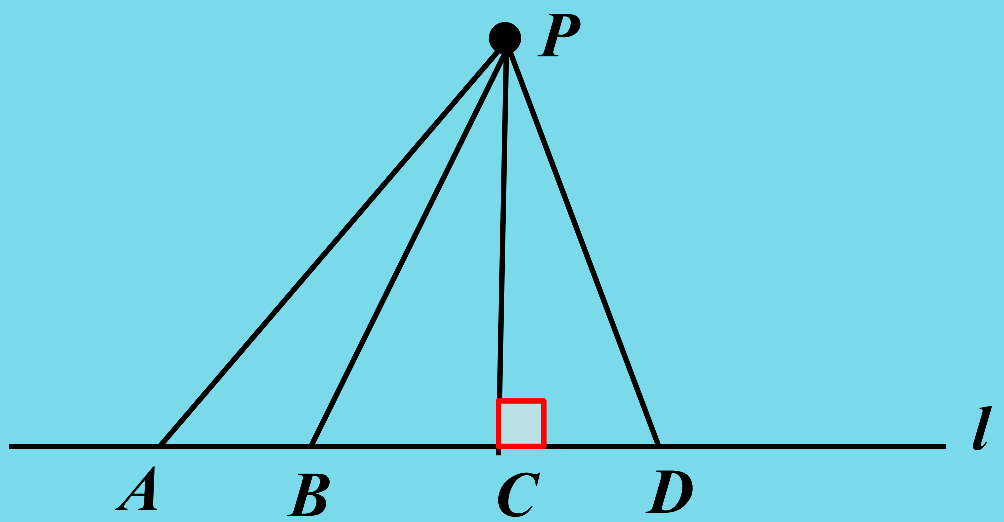
复习引入

1. 角平分线的概念

一条射线把一个角分成两个相等的角，这条射线叫做这个角的平分线.



2.下图中能表示点P到直线l的距离是<u>线段PC的长</u>.



3.下列两图中线段AP能表示直线l_1上一点P到直线l_2的距离的是<u>图1</u>.

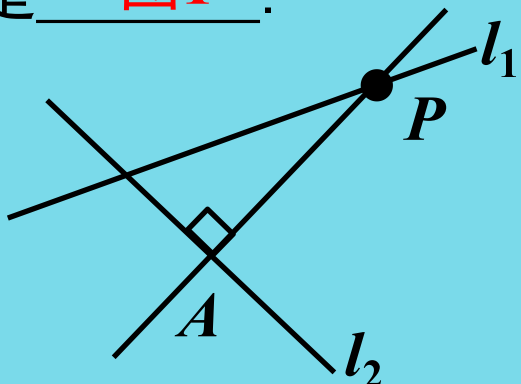


图1

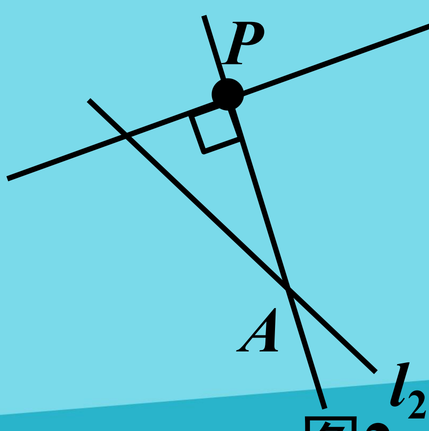


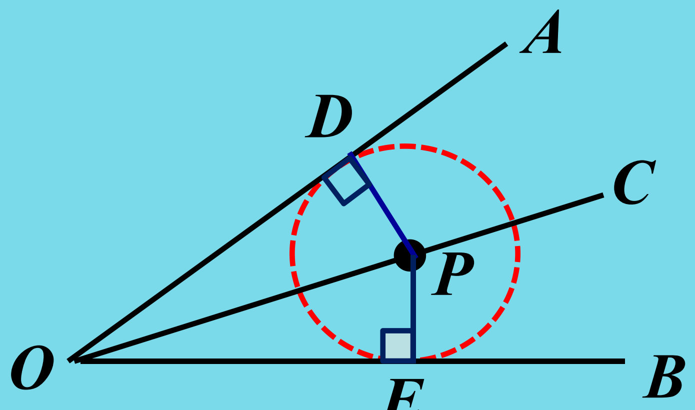
图2

一 角平分线的性质定理

作图探究

如图，任意作一个角∠AOB，作出∠AOB的平分线OC.在OC上任取一点P,过点P画出OA,OB的垂线，分别记垂足为D、E，测量PD，PE并作比较，你得到什么结论？在OC上再取几个点试一试.

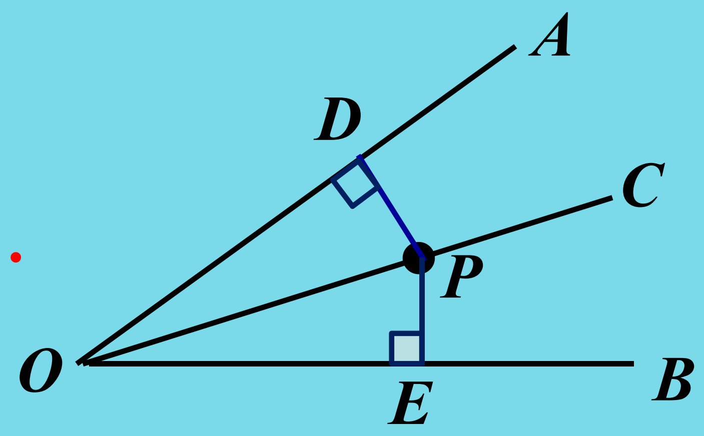
$PD=PE$



验证结论

已知：如图，$\angle AOC=\angle BOC$,点P在OC上，$PD\perp OA, PE\perp OB$,垂足分别为D,E.

求证：$PD=PE$.



证明：$\because PD\perp OA, PE\perp OB$,

$\therefore \angle PDO=\angle PEO=90°$.

在$\triangle PDO$和$\triangle PEO$中，

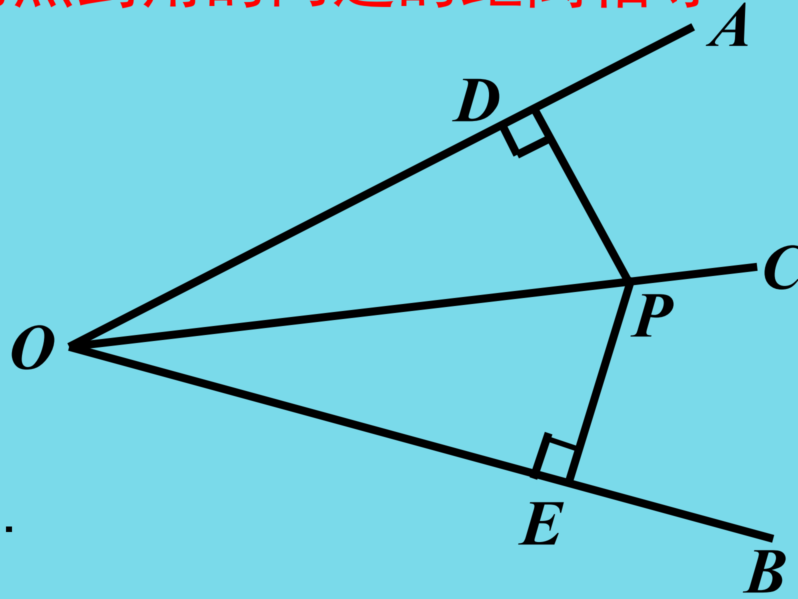
$$\begin{cases} \angle PDO=\angle PEO, \\ \angle AOC=\angle BOC, \\ OP=OP, \end{cases}$$

$\therefore \triangle PDO \cong \triangle PEO$(AAS).

$\therefore PD=PE$.

知识要点

◆ 性质定理： 角的平分线上的点到角的两边的距离相等.



应用所具备的条件：

（1）角的平分线；

（2）点在该平分线上；

（3）垂直距离.

定理的作用： 证明线段相等.

◆应用格式：

$\because OP$ 是$\angle AOB$的平分线，

$PD\perp OA, PE\perp OB$，

$\therefore PD = PE$

（在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等）.

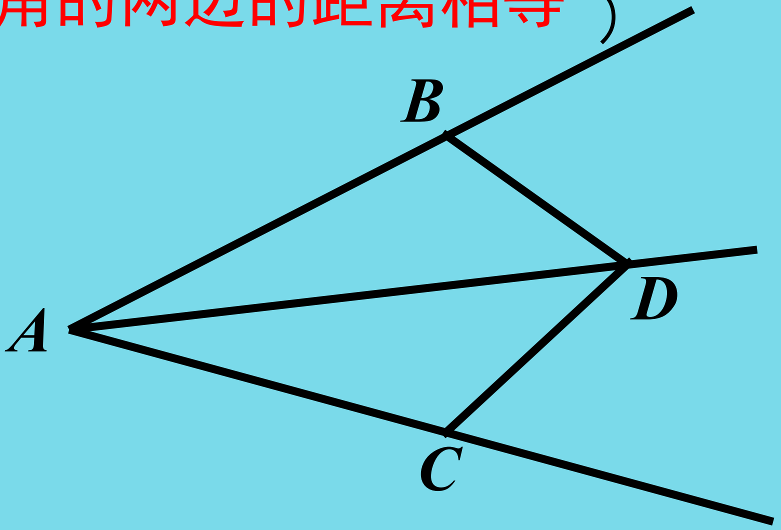
推理的理由有三个，必须写完全，不能少了任何一个.

判一判：（1）∵ 如图，AD平分$\angle BAC$（已知），

∴ $\underline{\quad BD \quad}$=$\underline{\quad CD \quad}$，

（ 在角的平分线上的点到这个角的两边的距离相等 ）

×

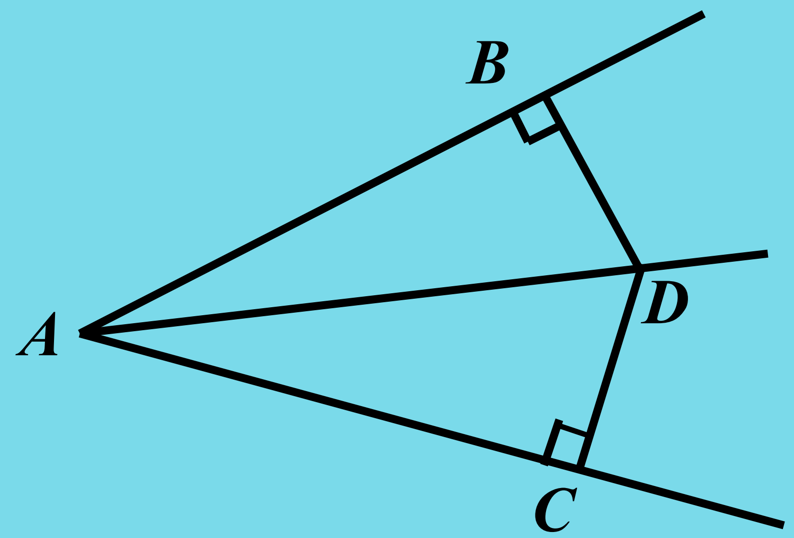


(2)∵ 如图，$DC \perp AC$，$DB \perp AB$ （已知）.

∴ $\underline{\quad BD \quad}=\underline{\quad CD \quad}$,

（在角内任意一条线上的点到这个角的两边的距离相等）

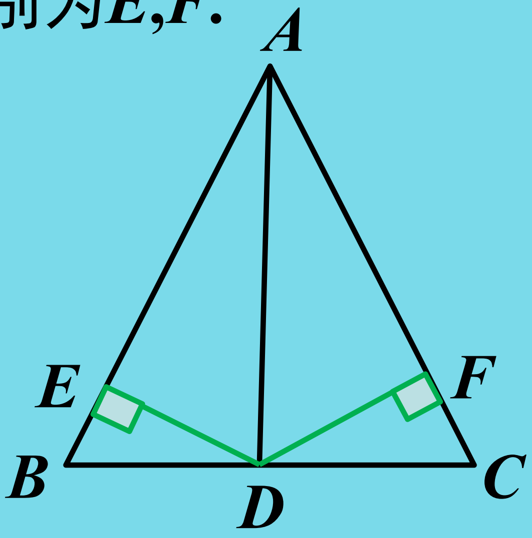
✕



典例精析

例1 已知：如图，在$\triangle ABC$中，AD是它的角平分线且$BD=CD$，$\angle B=\angle C$，$DE\perp AB$，$DF\perp AC$.垂足分别为E，F.

求证：$EB=FC$.



分析：先利用角平分线的性质定理得到$DE=DF$，再利用全等证明$\mathrm{Rt}\triangle BDE\cong\mathrm{Rt}\triangle CDF$.

证明：　$\because AD$是$\angle BAC$的角平分线， $DE\perp AB$, $DF\perp AC$,

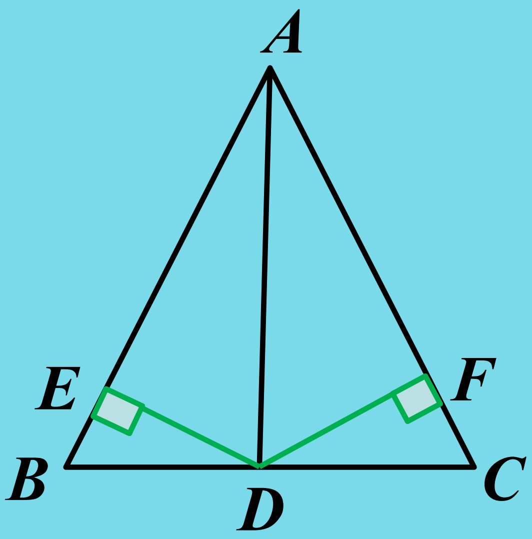
$\therefore DE=DF$, $\angle DEB=\angle DFC=90°$．

在$\text{Rt}\triangle BDE$ 和 $\text{Rt}\triangle CDF$中，

$$\begin{cases} \angle DEB=\angle DFC, \\ \angle B=\angle C, \\ BD=CD, \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BDE \cong \text{Rt}\triangle CDF$.

$\therefore EB=FC$.



角平分线性质定理的逆定理

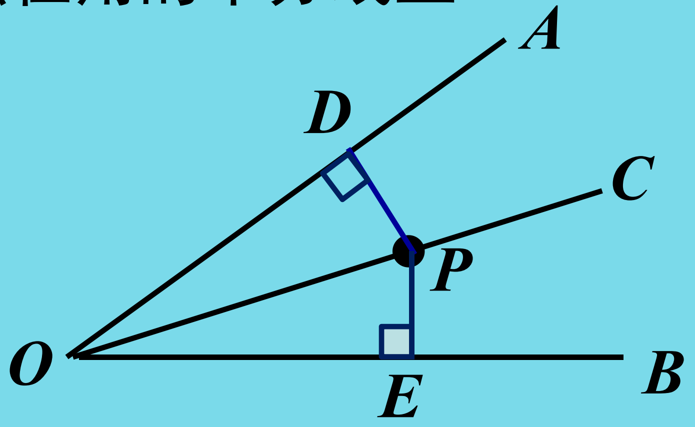
◆ 角平分线性质定理的逆定理

角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上.

应用所具备的条件：

（1）位置关系：点在角的内部；

（2）数量关系：该点到角两边的距离相等.



定理的作用：判断点是否在角平分线上.

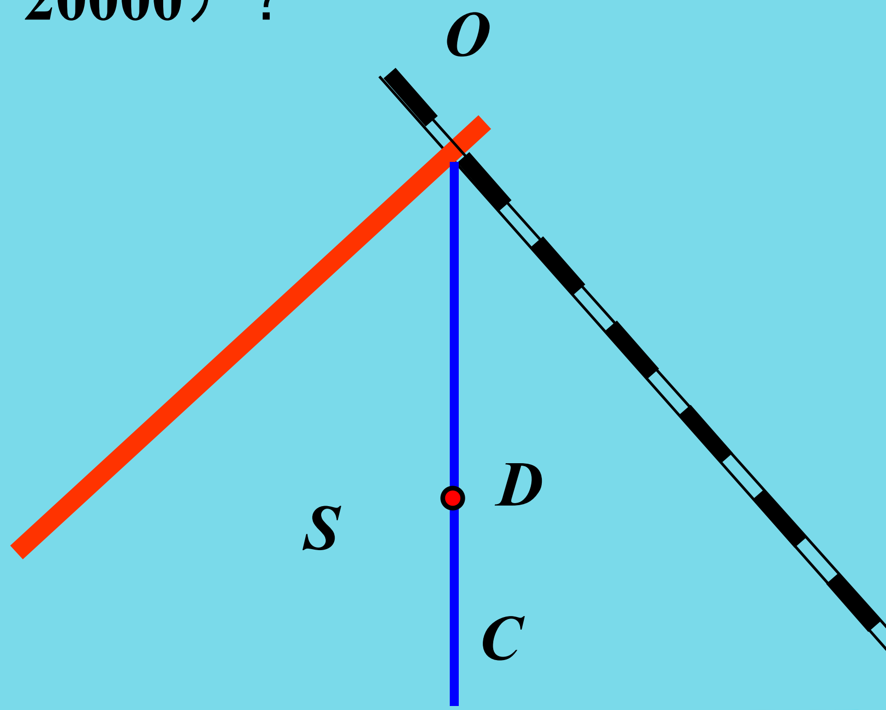
◆应用格式：

∵ $PD\perp OA, PE\perp OB$，$PD=PE$.

∴点P在$\angle AOB$的平分线上.

典例精析

例2　如图，要在*S*区建一个贸易市场，使它到铁路和公路距离相等，　离公路与铁路交叉处500米，这个集贸市场应建在何处（比例尺为1：20000）？

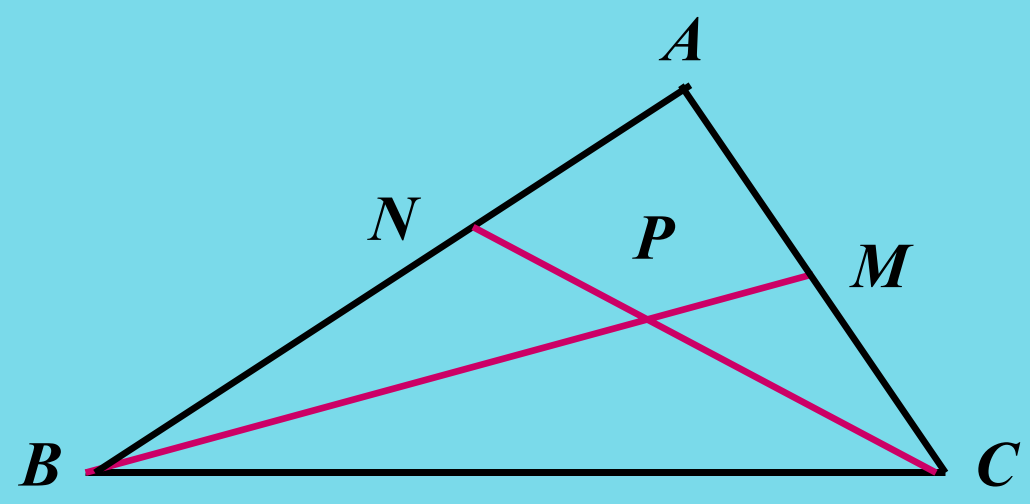


解：作夹角的角平分线*OC*，

截取*OD*=2.5cm ,*D*即为所求.

典例精析

例3 已知：如图，$\triangle ABC$的角平分线BM，CN相交于点P，求证：点P到三边AB，BC，CA的距离相等.



证明：过点P作PD，PE，PF分别垂直于AB，BC，CA，垂足分别为D，E，F.

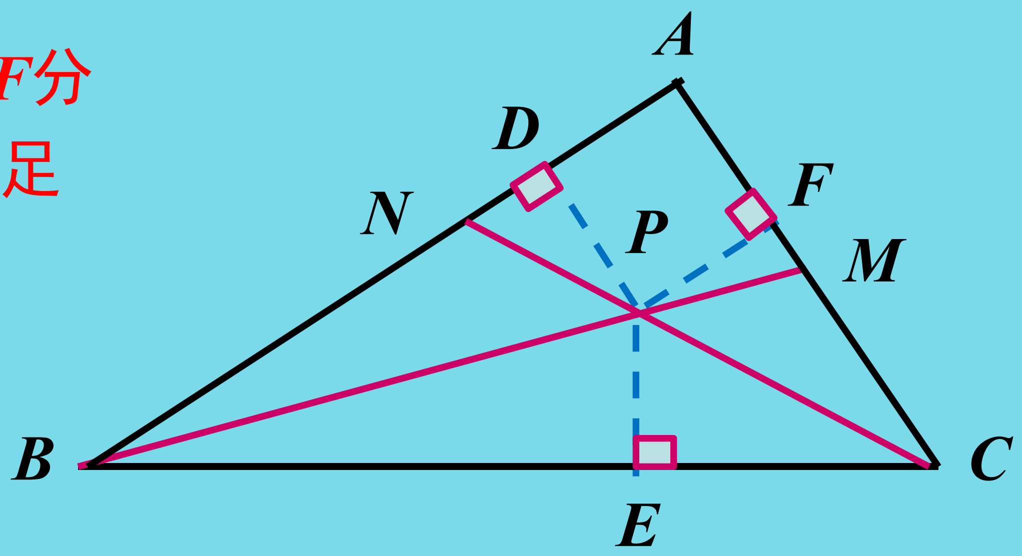
∵BM是△ABC的角平分线，

点P在BM上，

∴$PD=PE$.同理$PE=PF$.

∴$PD=PE=PF$.

即点P到三边AB，BC，CA的距离相等.



想一想：点P在∠A的平分线上吗？这说明三角形的三条角平分线有什么关系？　点P在∠A的平分线上.

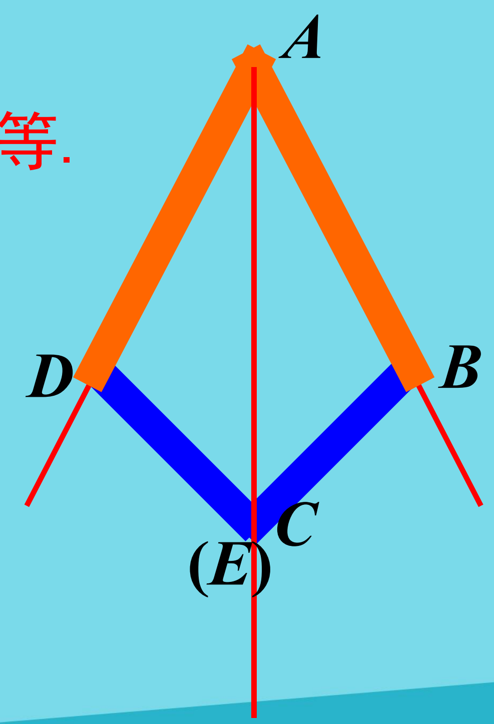
这说明三角形的三条角平分线相交于一点，这一点到三角形三边的距离相等.

结论：三角形的三条角平分线交于一点，并且这点到三边的距离相等.

用尺规作已知角的角平分线

如图，是一个平分角的仪器，其中$AB=AD$，$BC=DC$.将点A放在角的顶点，AB和AD沿着角的两边放下，沿AC画一条射线AE，AE就是角平分线. 你能说明它的道理吗?

其依据是SSS，两全等三角形的对应角相等.

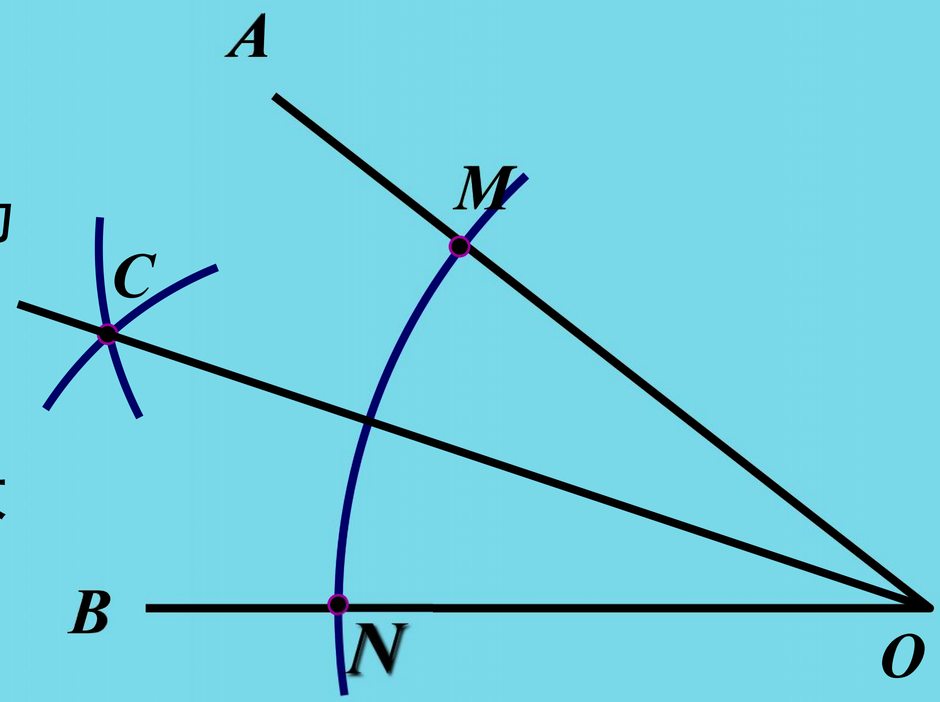


已知: ∠*AOB*.

求作：∠*AOB*的平分线.

动手画一画

仔细观察步骤



作法:

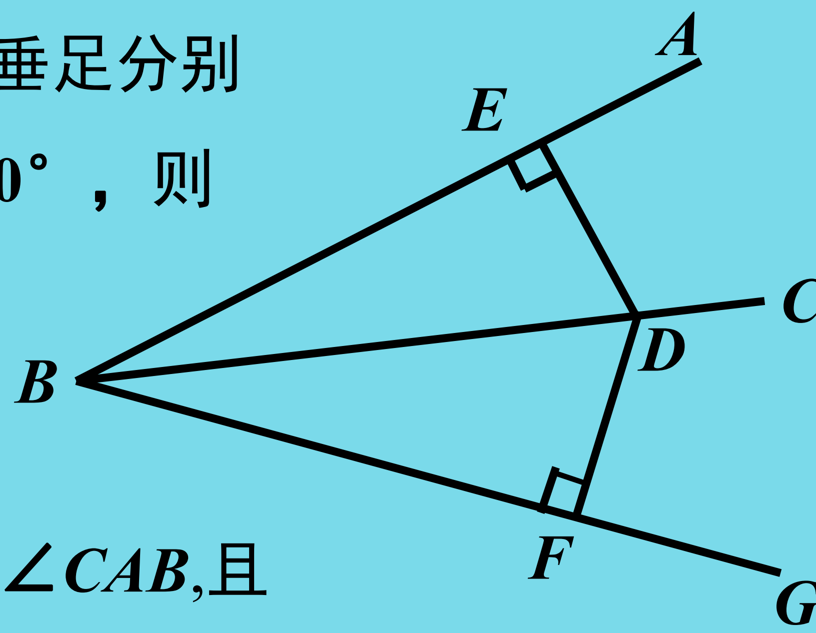
（1）以点*O*为圆心，适当长为半径画弧，交*OA*于点*M*，交*OB*于点*N*.

（2）分别以点*MN*为圆心，大于 $\frac{1}{2}$*MN*的长为半径画弧，两弧在∠*AOB*的内部相交于点*C*.

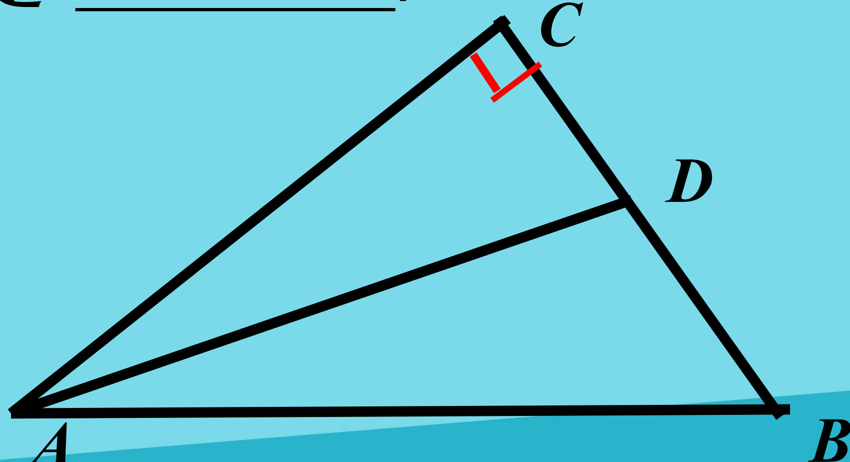
（3）画射线*OC*.射线*OC*即为所求.

作角平分线是最基本的尺规作图, 大家一定要掌握噢!

1. 如图，$DE \perp AB$，$DF \perp BG$，垂足分别是E，F， $DE = DF$， $\angle EDB = 60°$ ，则$\angle EBF=$__60__度，$BE=$__BF__.



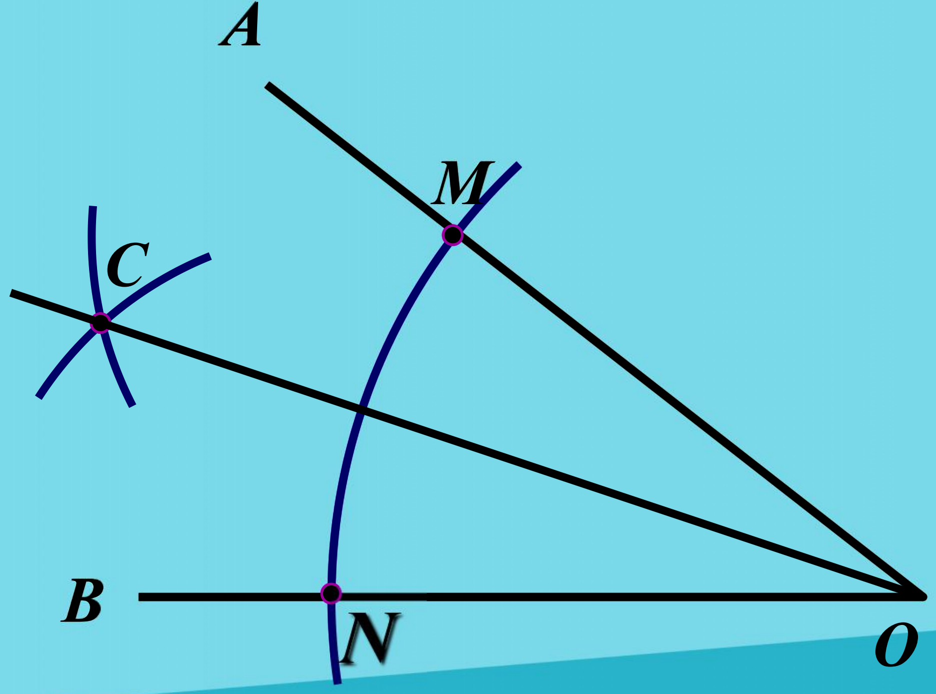
2.$\triangle ABC$中， $\angle C=90°$,AD平分$\angle CAB$,且$BC=8$,$BD=5$,则点D到AB的距离是 ____3____.



3.用尺规作图作一个已知角的平分线的示意图如图所示，则能说明∠*AOC*=∠*BOC*的依据是（　 A　）

A.SSS　　　B.ASA

C.AAS　　D.角平分线上的点到角两边的距离相等



4. 如图所示，已知△ABC中，PE∥AB交BC于点E，PF∥AC交BC于点F，点P是AD上一点，且点D到PE的距离与到PF的距离相等，判断AD是否平分∠BAC，并说明理由.

解：AD平分∠BAC. 理由如下：

∵D到PE的距离与到PF的距离相等，

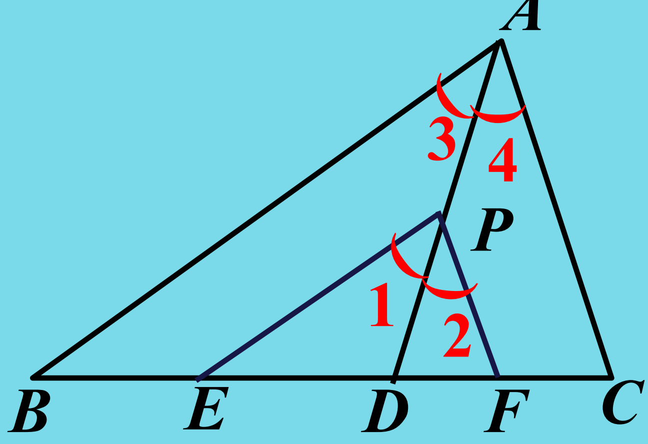
∴点D在∠EPF的平分线上.

∴∠1＝∠2.

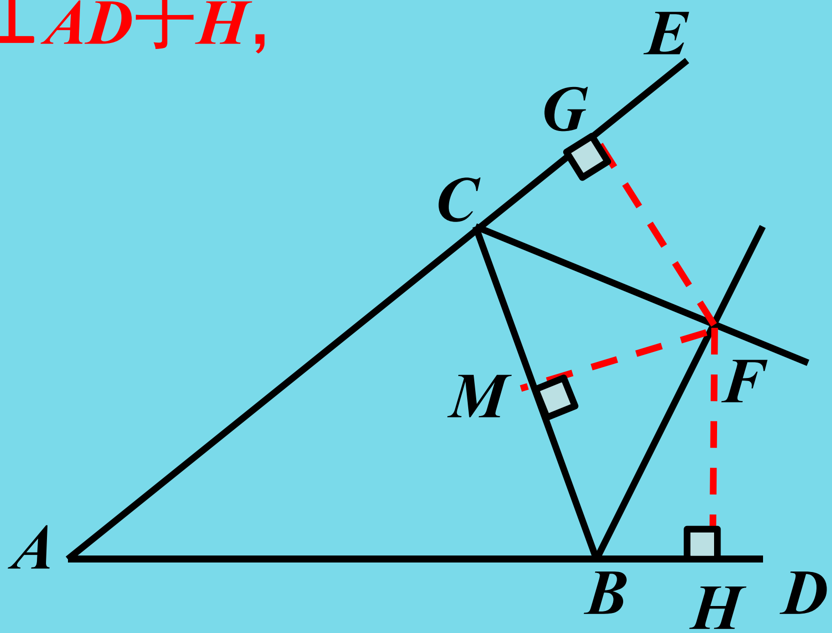
又∵PE∥AB，∴∠1＝∠3.

同理，∠2＝∠4.

∴∠3＝∠4，∴AD平分∠BAC.



5.如图，已知△ABC的外角$\angle CBD$和$\angle BCE$的平分线相交于点F，求证：点F在$\angle DAE$的平分线上.



证明：过点F作$FG\perp AE$于G，$FH\perp AD$于H，

$FM\perp BC$于M.

∵点F在$\angle BCE$的平分线上，

$FG\perp AE$，$FM\perp BC$.

∴$FG=FM$.

又∵点F在$\angle CBD$的平分线上，

$FH\perp AD$，$FM\perp BC$，

∴$FM=FH$，∴$FG=FH$.

∴点F在$\angle DAE$的平分线上.

课堂小结

角的平分线

- 性质定理
  - 一个点：角平分线上的点；
  - 二距离：点到角两边的距离；
  - 两相等：两条垂线段相等
- 性质定理的逆定理
  - 内容：角的内部到角两边距离相等的点在这个角的平分线上
  - 作用：判断一个点是否在角的平分线上
- 辅助线添加：过角平分线上一点向两边作垂线段

见《学练优》本课时练习