第十五章 二次根式

小结与复习

知识回顾 —— 考点分析 —— 复习归纳 —— 课后作业

1.定义：　形如$\underline{\sqrt{a}(a\geqslant 0)}$的式子叫做二次根式，

其中a叫做被开方数.

2.性质：

(1)积的算术平方根：等于算术平方根的积；

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\left(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0\right)$$

(2)商的算术平方根：等于算术平方根的商；

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left(a\geqslant 0,\ b>0\right)$$

3.最简二次根式：

满足以下三个条件的二次根式叫最简二次根式：

(1)被开方数不能含有开得尽方的因数或因式；例如：$\sqrt{54}$

(2)被开方数不能含有分母；例如：$\sqrt{\frac{1}{2}}$

(3)分母不能含有根号. 例如：$\frac{1}{\sqrt{3}}$

注意：二次根式的化简与运算，最后结果应化成最简二次根式.

4. 二次根式的运算 ：

(1)二次根式的加减：类似合并同类项 ；

例如：$2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(2+3)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

(2)二次根式的乘法 ：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$$

(3)二次根式的除法 ： $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\,(a\geqslant 0,\ b>0)$

(4) 二次根式的乘方 ： $\left(\sqrt{a}\right)^2=a(a\geqslant 0)$

注意平方差公式与完全平方公式的运用！

考点一　二次根式有意义的条件

例1 使代数式 $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3-x}$ 有意义的x的取值范围是 $\underline{x\geqslant\frac{1}{2}\text{且}x\neq3}$.

【解析】分别求出使分式、二次根式有意义的x的取值范围，再求出它们解集的公共部分.根据题意，有$3-x\neq0$，$2x-1\geqslant0$，解得 $x\geqslant\frac{1}{2}$且$x\neq3$.

针对训练

1.若式子$\sqrt{x-3}$ 在实数范围内有意义，则x的取值范围是（ A ）

A.$x \geqslant 3$　　B.$x \leqslant 3$　　C.$x > 3$　　D.$x < 3$

2.若 $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-6} = \sqrt{x(x-6)}$，则（ A ）

A.$x \geqslant 6$　　B.$x \geqslant 0$　　C.$0 \leqslant x \leqslant 6$　　D.x为一切实数

考点二　二次根式的性质

例2　若 $\sqrt{x-1}+(3x+y-1)^2=0$，求 $\sqrt{5x+y^2}$ 的值.

【解析】根据题意及二次根式与完全平方式的非负性可知 $\sqrt{x-1}$ 和 $(3x+y-1)^2$ 均为0.

解：$\because \sqrt{x-1}+(3x+y-1)^2=0$,

$\therefore x-1=0, 3x+y-1=0$，解得 $x=1, y=-2$,

则 $\sqrt{5x+y^2}=\sqrt{5\times 1+(-2)^2}=3$.

方法总结

初中阶段主要涉及三种非负数：$\sqrt{a}\geq 0$，$|a|\geq 0$，$a^2\geq 0$.如果若干个非负数的和为0，那么这若干个非负数都必为0.这是求一个方程中含有多个未知数的有效方法之一.

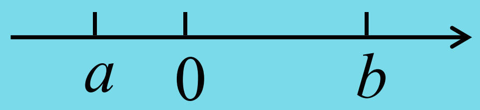
针对训练

3. 若实数a,b满足$|a+2|+\sqrt{b-4}=0$，则$\frac{a^2}{b}=$__1__.

考点三　二次根式的化简

例3　实数a,b在数轴上的位置如图所示，

请化简：$|a|-\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$.



【解析】化简此代数式的关键是能准确地判断a,b的符号，然后利用绝对值及二次根式的性质化简.

解：由数轴可以确定$a<0,b>0$

所以$|a|=-a,\sqrt{a^2}=-a,\sqrt{b^2}=b$.

所以原式$=-a-(-a)+b=b$.

针对训练

4.若$1<a<3$,化简$\sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2-6a+9}$

的结果是__2__.

考点四　二次根式的计算

例4　计算：$\sqrt{24}\times\sqrt{\frac{1}{3}}-4\times\sqrt{\frac{1}{8}}\times(1-\sqrt{2})^{0}$.

【解析】：先算乘方，再算乘除，最后算加减.

解：原式 $=\sqrt{24\times\frac{1}{3}}-4\times\frac{\sqrt{2}}{4}\times1$

$=2\sqrt{2}-\sqrt{2}$

$=\sqrt{2}$.

针对训练

5.化简：$\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{3})-\sqrt{24}-|\sqrt{6}-3|=$ $\underline{\quad -6\quad}$.

考点五　二次根式的化简求值

例5　先化简，再求值：$\dfrac{x^2}{x-y}-\dfrac{y^2}{x-y}$，其中

$x=1+2\sqrt{3}, y=1-2\sqrt{3}$.

【解析】：先利用分式的加减运算化简式子，然后代入数值计算即可.

解：$\dfrac{x^2}{x-y}-\dfrac{y^2}{x-y}=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}=\dfrac{(x+y)(x-y)}{x-y}=x+y.$

当 $x=1+2\sqrt{3}, y=1-2\sqrt{3}$时，

原式$=1+2\sqrt{3}+1-2\sqrt{3}=2.$

针对训练

6. 先化简，再求值：$\left(1-\dfrac{a-2}{a^2-4}\right)\div\dfrac{a^2+a}{a^2+4a+4}$，其中$a=\sqrt{2}$.

解：原式 $=\dfrac{a^2-4-a+2}{(a+2)(a-2)}\div\dfrac{a(a+1)}{(a+2)^2}$

$=\dfrac{(a-2)(a+1)}{(a+2)(a-2)}\cdot\dfrac{(a+2)^2}{a(a+1)}$

$=\dfrac{a+2}{a}$

当$a=\sqrt{2}$时，

原式$=\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.

- 二次根式 $\sqrt{a}\,(a\geq 0)$
  - 概念
    - 最简二次根式
    - 分母有理化
  - 性质
    - $\sqrt{a}\geq 0\,(a\geq 0)$;
    - $\left(\sqrt{a}\right)^2=a\,(a\geq 0)$;
    - $\sqrt{a^2}=a\,(a\geq 0)$;
    - $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\bullet\sqrt{b}\,(a\geq 0,b\geq 0)$;
    - $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(a\geq 0,b>0)$.
  - 运算
    - 二次根式的乘除
    - 二次根式的加减

见《学练优》本章热点专练