八年级数学·上　　新课标［冀教］

第十七章　特殊三角形

17.5　反证法

学习新知

检测反馈

问题思考

三个古希腊哲学家甲、乙、丙，由于争论和天气炎热感到疲倦了，于是在花园里的一棵大树下躺下来休息一会儿，结果都睡着了．这时一个爱开玩笑的人用炭涂黑了他们的前额．三个人醒来以后，彼此看了看，都笑了起来．但这并没有引起他们之中任何一个人的担心，因为每个人都以为是其他两人在互相取笑．其中甲突然不笑了，因为他发觉自己的前额也被涂黑了．他是怎样觉察到的呢?你能想出来吗?

活动一:反证法

学习新知

仔细分析甲的思考过程,不难看出它分4个步骤:

1.假设自己的前额没被涂黑;

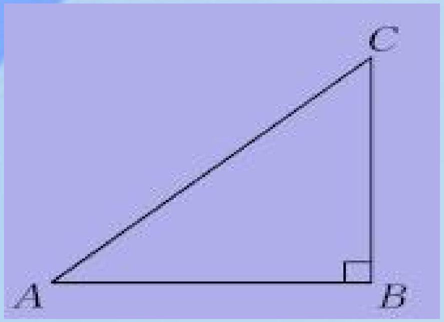
2.根据这个假设进行推理,推得一个与乙对丙的笑不感到奇怪的这个事实相矛盾的结果——乙应对丙的笑感到奇怪;

3.根据这个矛盾,说明原来假设自己的前额没被涂黑是错误的;

4.根据原来的假设:前额没被涂黑是错误的,便可知道没被涂黑的反面——被涂黑了是正确的结论.

简单地说,甲是通过说明前额被涂黑了的反面——没被涂黑是错误的,从而觉察到自己的前额被涂黑了.

已知:如图所示, △ ABC.
求证:在△ ABC中,如果它含直角,
那么它只能有一个直角.



证明:假设△ ABC中有两个(或三个)直角，不妨设$\angle A=\angle B=90°$，
$\because \angle A+\angle B=180°$，
$\therefore \angle A+\angle B+\angle C=180°+\angle C>180°$，
这与“三角形的内角和等于180°”相矛盾,
因此三角形有两个(或三个)直角的假设是不成立的.所以如果三角形含直角,那么它只能有一个直角.

总结：反证法是间接证明的方法

用反证法证明一个命题是真命题的一般步骤.

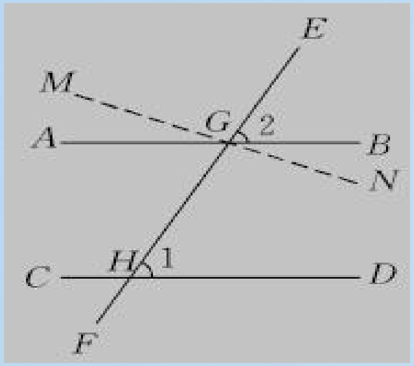
第一步:假设命题的结论不成立.

第二步:从这个假设和其他已知条件出发,经过推理论证,得出与学过的概念、基本事实、已证明的定理、性质或题设条件相矛盾的结果.

第三步:由矛盾的结果,判定假设不成立,从而说明命题的结论是正确的.

活动二:应用举例

例1 用反证法证明平行线的性质定理一:两条平行线被第三条直线所截,同位角相等.



已知:如图所示，直线$AB /\!/ CD$，直线EF分别与直线AB,CD交于点G，H，$\angle 1$和$\angle 2$是同位角.

求证:$\angle 1=\angle 2$.

证明:假设$\angle 1 \neq \angle 2$.过点G作直线MN，使得$\angle EGN=\angle 1$.

$\because \angle EGN=\angle 1$，$\therefore MN /\!/ CD$(基本事实).

又$\because AB /\!/ CD$(已知)，

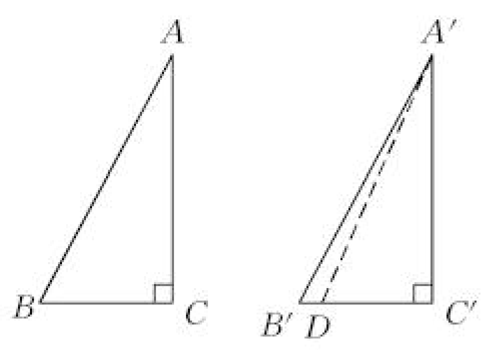
$\therefore$过点G，有两条不同的直线AB和MN都与直线CD平行.

这与“经过已知直线外一点,有且只有一条直线和已知直线平行”相矛盾.

$\therefore \angle 1 \neq \angle 2$的假设是不成立的.因此$\angle 1=\angle 2$.

已知:在ΔABC和$\Delta A'B'C'$,$\angle C=\angle C'=90°$,$AB=A'B'$,$AC=A'C'$,如图所示.

求证: $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.



证明:假设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不全等，即$BC\neq B'C'$，不妨设$BC<B'C'$，在$B'C'$上截取$C'D=CB$,连接$A'D$.

在$\triangle ABC$与$\triangle A'DC'$中，

$\because AC=A'C',\angle C=\angle C',CB=C'D$,

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle A'DC'$(SAS).

$\therefore AB=A'D$(全等三角形的对应边相等).

$\because AB=A'B'$(已知),

$\therefore A'B'=A'D$(等量代换).

$\therefore \angle B'=\angle A'DB'$(等边对等角).

$\therefore \angle A'DB'<90°$(三角形的内角和定理),

即$\angle C'<\angle A'DB'<90°$(三角形的外角大于和它不相邻的内角).

这与$\angle C'=90°$相矛盾.

因此,$BC\neq B'C'$的假设不成立,即$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$不全等的假设不成立.

所以$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$.

检测反馈

1.用反证法证明“已知:在△ABC中,∠C=90°.求证:∠A,∠B中至少有一个角不大于45°”时,应先假设 (A)

A.∠A>45°,∠B>45°

B.∠A≥45°,∠B≥45°

C.∠A<45°,∠B<45°

D.∠A≤45°,∠B≤45°

解析:用反证法证明命题“∠A,∠B中至少有一个角不大于45°”时,应先假设∠A>45°,∠B>45°.故选A.

2.要证明命题“若$a>b$，则$a^2>b^2$”是假命题,下列a，b的值不能作为反例的是 D （　　）

A.$a=1$，$b=-2$　　B.$a=0$，$b=-1$

C.$a=-1$，$b=-2$　　D.$a=2$，$b=-1$

解析:∵当$a=1,b=-2$或$a=0,b=-1$或$a=-1$，$b=-2$时，$a>b$，$a^2<b^2$，∴A，B，C都能证明“若$a>b$,则$a^2>b^2$”是假命题，故A，B，C不符合题意，只有当$a=2$，$b=-1$时，“若$a>b$,则$a^2>b^2$”是真命题, 故此时a,b的值不能作为反例.故选D.

3.用反证法证明“三角形的三个外角中至少有两个钝角”时,假设正确的是（ D ）

A.假设三个外角都是锐角

B.假设至少有一个钝角

C.假设三个外角都是钝角

D.假设三个外角中只有一个钝角

解析:∵“至少有两个”的反面为“至多有一个”,而反证法的假设即原命题的结论不成立,∴应假设:三角形三个外角中至多有一个钝角,也可以假设:三个外角中只有一个钝角.故选D.

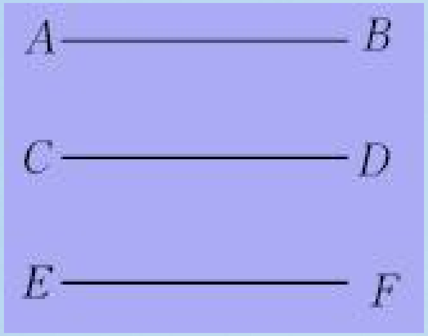
4.用反证法证明“如图所示,如果$AB\parallel CD$,$AB\parallel EF$,那么$CD\parallel EF$”时,证明的第一步是（ D ）

A.假设AB不平行于CD

B.假设AB不平行于EF

C.假设$CD\parallel EF$

D.假设CD不平行于EF

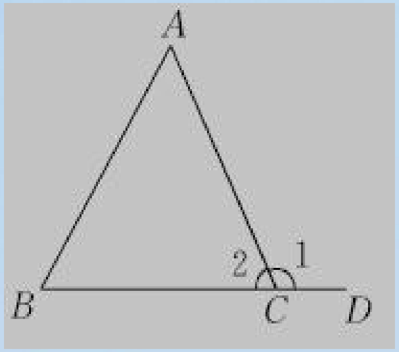


解析:∵用反证法证明命题“如果$AB\parallel CD$,$AB\parallel EF$,那么$CD\parallel EF$,”∴证明的第一步应是:从结论反面出发,假设CD不平行于EF.故选D.

5.用反证法证明三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

解析:首先假设三角形的一个外角不等于与它不相邻的两个内角的和,根据三角形的内角和等于180°,得到矛盾,所以假设不成立,进而可知三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和.

已知:如图所示,∠1是Δ*ABC*的一个外角.
求证:∠1=∠*A*+∠*B*.



证明:假设∠1≠∠*A*+∠*B*,
在Δ*ABC*中,∠*A*+∠*B*+∠2=180°,
∵∠1+∠2=180°,∴∠2=180°-∠1,
∵∠1≠∠*A*+∠*B*,∴∠2≠180°-(∠*A*+∠*B*)
∴∠*A*+∠*B*+∠2≠180°.
与“三角形的内角和等于180°”相矛盾,
∴假设不成立,原命题成立,
即∠1=∠*A*+∠*B*.

6.用反证法证明一个三角形中不可能有两个角是钝角.

解析:根据反证法的证明方法先假设,进而证明即可.

已知:ΔABC.

求证:$\angle A,\angle B,\angle C$中不可能有两个角是钝角.

证明:假设$\angle A,\angle B,\angle C$中有两个角是钝角,不妨设$\angle A,\angle B$为钝角,

$\therefore \angle A+\angle B>180^\circ$,这与三角形内角和定理相矛盾,故假设不成立,原命题正确.

即一个三角形中不可能有两个角是钝角.

7.请用反证法证明“如果两个整数的积是偶数,那么这两个整数中至少有一个是偶数.”

解析:首先假设这两个整数都是奇数,其中一个奇数为$2n+1$,另一个奇数为$2p+1$,利用多项式乘以多项式得出$(2n+1)(2p+1)=2(2np+n+p)+1$,进而得出矛盾,则原命题正确.

证明:假设这两个整数都是奇数,其中一个奇数为$2n+1$,另一个奇数为$2p+1$(n,p为整数),

则$(2n+1)(2p+1)=2(2np+n+p)+1$,

∵无论n,p取何值,$2(2np+n+p)+1$都是奇数,这与两个整数的积为偶数相矛盾,

∴假设不成立,

∴这两个整数中至少有一个是偶数.

8.试用举反例的方法说明下列命题是假命题.

举例:如果$ab<0$,那么$a+b<0$.

反例:设$a=4,b=-3$,则$ab=4\times(-3)=-12<0$,但$a+b=4+(-3)=1>0$,所以这个命题是假命题.

(1)如果$a+b>0$,那么$ab>0$;

(2)如果a是无理数,b是无理数,那么$a+b$是无理数;

(3)两个三角形中,两边及其中一边的对角对应相等,则这两个三角形全等(画出图形,并加以说明).

解析:(1)此题是一道开放题, 可举的反例很多, 但只举一例即可. 如果$a+b>0$,那么$ab>0$,所举的反例是a,b一个为正数,一个为负数, 且正数的绝对值大于负数.(2)可利用平方差公式找这样的无理数,比如$1\pm\sqrt{2}$,两数相加就是有理数.(3)此题主要利用三角形全等的判定方法来举例, 在这里注意, 没有边边角定理.

解:(1)取$a=2,b=-1$,则$a+b=1>0$,但$ab=-2<0$.所以此命题是假命题.

(2)取$a=1+\sqrt{2}$,$b=1-\sqrt{2}$,a,b均为无理数,但$a+b=2$是有理数.所以此命题是假命题.

(3)如图所示,在ΔABC与ΔABD中,$AB=AB,AD=AC,\angle ABD=\angle ABC$,但$\Delta ABC$与$\Delta ABD$显然不全等.所以此命题是假命题.