

24. 3

一元二次方程根与系数的关系



24. 3 一元二次方程根与系数的关系

5

分钟

预习导航

知识点梳理

如果 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根是 x_1, x_2 , 那么

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

在应用根与系数关系时应注意两个条件:

(1) 方程二次项系数不为0;

(2) $b^2-4ac\geq 0$.

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

1. (3分)(2013·武汉)若 x_1 , x_2 是一元二次方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 的两个根, 则 x_1x_2 的值是(**B**)

A. -2 B. -3 C. 2 D. 3

2. (3分)若 x_1 , x_2 是一元二次方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两根, 则 $x_1 + x_2$ 的值是(**C**)

A. -2 B. 2 C. 3 D. 1

3. (3分)下列一元二次方程两实根和为-4的是(**D**)

A. $x^2 + 2x - 4 = 0$ B. $x^2 - 4x + 4 = 0$

C. $x^2 + 4x + 10 = 0$ D. $x^2 + 4x - 5 = 0$

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

4. (3分)已知 x_1 , x_2 是方程 $x^2 - 4x - 5 = 0$ 的两个实数根, 则 $(x_1 - 2)(x_2 - 2) = \underline{\quad -9 \quad}$.

5. (6分)已知 α , β 是一元二次方程 $2x^2 - 3x - 1 = 0$ 的两个实数根, 求下列代数式的值:

$$(1) \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta};$$

$$(1) -\frac{13}{2}$$

$$(2) (\alpha - 2)(\beta - 2).$$

$$(2) \frac{1}{2}$$

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

6. (3分)孔明同学在解一元二次方程 $x^2 - 3x + c = 0$ 时, 正确解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, 则 c 的值为 2.

7. (3分)已知关于 x 的方程 $x^2 + mx - 6 = 0$ 的一个根为2, 则这个方程的另一个根是 -3.

8. (4分)如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两根分别为 $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, 那么 p , q 的值分别是(**A**)

A. -3, 2 B. 3, -2

C. 2, -3 D. 2, 3

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

9. (4分)如果关于 x 的一元二次方程 $x^2+4x+a=0$ 的两个不相等的实数根 x_1, x_2 满足 $x_1x_2-2x_1-2x_2-5=0$, 那么 a 的值为(**B**)

A. 3 B. -3

C. 13 D. -13

10. (8分)关于 x 的一元二次方程 $x^2+3x+m-1=0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 .

(1)求 m 的取值范围;

(2)若 $2(x_1+x_2)+x_1x_2+10=0$, 求 m 的值.

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

$$(1) \Delta = 9 - 4(m - 1) = 13 - 4m \geq 0, \therefore m \leq \frac{13}{4}$$

$$(2) \because x_1 + x_2 = -3, x_1 x_2 = m - 1, \therefore 2 \times (-3) + (m - 1) + 10 = 0, \text{ 可得 } m = -3, \text{ 此时 } \Delta > 0, \\ \therefore m = -3$$

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

【易错盘点】

【例】已知 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$ 的两个不相等的实数根，且满足 $x_1 + x_2 = m^2$ ，则 m 的值是()

A. -1

B. 3

C. 3或-1

D. -3或1

【错解】C

【错因分析】由根与系数关系求得方程中待定系数的值没有通过 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 检验.

【正解】

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

11. (5分)已知一元二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的两个根分别是 x_1, x_2 , 则 $x_1x_2+x_1x_2$ 的值为(**A**)

A. -3 B. 3 C. -6 D. 6

12. (5分)解某个一元二次方程时, 甲看错了方程的常数项, 因而得出的两根为8和2; 乙看错了方程的一次项的系数, 因而得出两根为-9或-1, 那么正确的方程为(**A**)

A. $x^2-10x+9=0$ B. $x^2+10x+9=0$
C. $x^2-10x-9=0$ D. $x^2+10x-9=0$

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

13. (5分)若 x_1, x_2 是方程 $x^2+x-1=0$ 的两个根,
则 $x_1^2+x_2^2 = \underline{\quad 3 \quad}$.

三、解答题(共45分)

14. (9分)已知2-是 $x^2-4x+c=0$ 的一个根, 求方程另一个根及c的值.

设方程的另一个根为 x_0 , 依题意得
$$\begin{cases} 2-\sqrt{2}+x_0=4, & \begin{cases} x_0=2+\sqrt{2}, \\ c=2 \end{cases} \\ (2-\sqrt{2})x_0=c, \end{cases}$$

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

15. (10分)已知一元二次方程 $x^2 - 2x + m = 0$ 的两个实数根为 x_1 , x_2 , 且 $x_1 + 3x_2 = 3$, 求 m 的值.

由题意得, $x_1 + x_2 = 2$, 又 $x_1 + 3x_2 = 3$, 所以 $x_2 = \frac{1}{2}$, 再把 $x_2 = \frac{1}{2}$ 代入方程, 得 $m = \frac{3}{4}$

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

16. (12分)已知关于x的一元二次方程 $x^2=2(1-m)x-m^2$ 的两实数根为 x_1, x_2 .

(1)求m的取值范围;

(1)将原方程整理为 $x^2+2(m-1)x+m^2=0$, $\therefore \Delta=[2(m-1)]^2-4m^2=-8m+4 \geq 0$ 得 $m \leq \frac{1}{2}$

(2)设 $y=x_1+x_2$, 当y取最小值时, 求相应的m的值, 并求出最小值.

(2) $\because x_1, x_2$ 为 $x^2+2(m-1)x+m^2=0$ 的两根, $\therefore y=x_1+x_2=-2m+2$, 且 $m \leq \frac{1}{2}$, 因而y随

m的增大而减小, 故当 $m=\frac{1}{2}$ 时, 取得最小值为1

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

17. (14分) 已知 x_1, x_2 是一元二次方程 $(a-6)x^2+2ax+a=0$ 的两个实数根.

(1) 是否存在实数 a , 使 $-x_1+x_1x_2=4+x_2$ 成立? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 请说明理由;

(2) 求使 $(x_1+1)(x_2+1)$ 为负整数的实数 a 的整数值.

$$(1) \because x_1+x_2 = -\frac{2a}{a-6}, \quad x_1x_2 = \frac{a}{a-6}, \quad \therefore \text{由 } x_1x_2 = 4+x_1+x_2 \text{ 得 } \frac{a}{a-6} = 4 - \frac{2a}{a-6}, \quad \therefore a=24, \text{ 当 } a$$

$=24$ 时, $a-6 \neq 0, \Delta > 0, \therefore$ 存在实数 $a=24$, 使 $-x_1+x_1x_2=4+x_2$ 成立

24. 3 一元二次方程根与系数的关系

$$(2) \because (x_1+1)(x_2+1) = (x_1+x_2) + x_1x_2 + 1 = \frac{-2a}{a-6} + \frac{a}{a-6} + \frac{a-6}{a-6} = \frac{-6}{a-6},$$

\therefore 要使其为负整数，则只需 a 为 7, 8, 9, 12