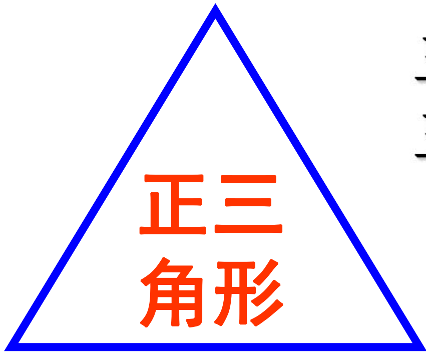
29.5 正多边形和圆

想一想



三条边相等，
三个角相等
（60°）

四条边相等，
四个角相等
（90°）

正多边形定义

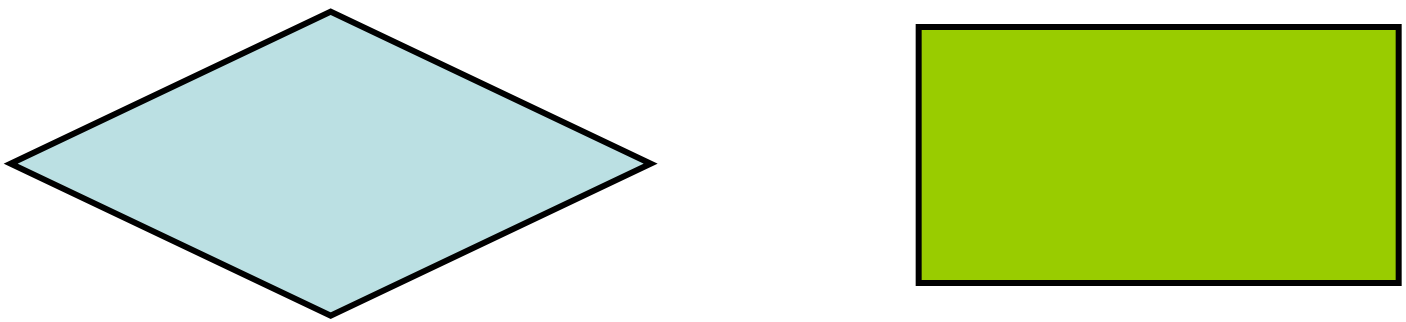
各边相等，各角也相等的多边形是正多边形.

正n边形：如果一个正多边形有n条边，

那么这个正多边形叫做正n边形.

想一想

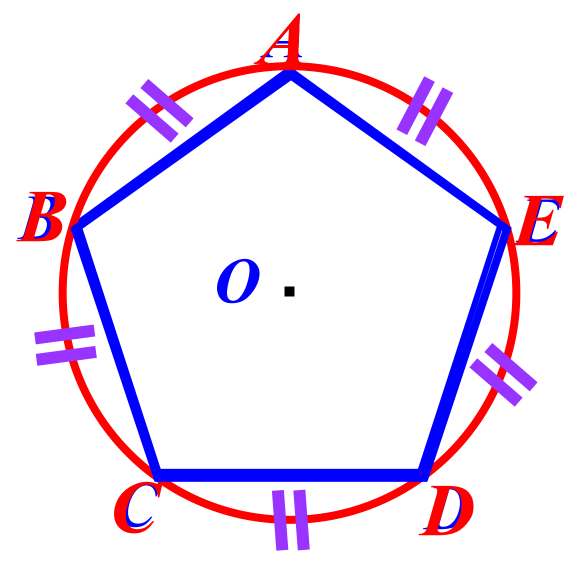
菱形是正多边形吗？矩形是正多边形吗？为什么？



探索新知

你知道正多边形与圆的关系吗？

正多边形和圆的关系非常密切，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以作出这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆.



我们以圆内接正五边形为例证明.

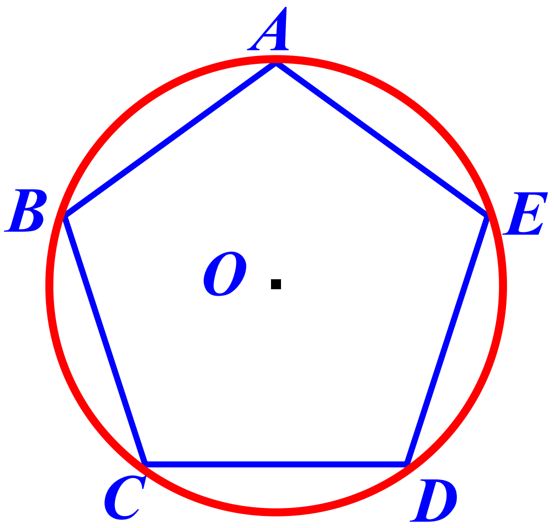
如图, 把⊙O分成相等的5段弧, 依次连接各分点得到正五边形$ABCDE$.

$\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$

$\therefore AB=BC=CD=DE=EA,$

$\therefore \overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}=3\overset{\frown}{AB}$

$\therefore \angle A=\angle B.$



同理$\angle B=\angle C=\angle D=\angle E.$

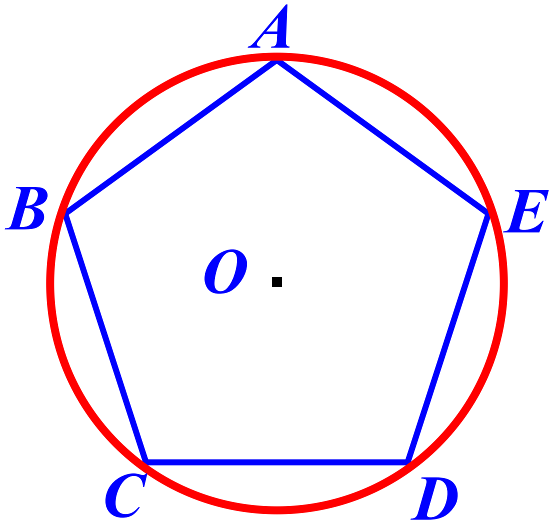
又$\because$五边形$ABCDE$的顶点都在⊙ O上,

$\therefore$ 五边形$ABCDE$是⊙O的内接正五边形,

⊙O是五边形$ABCDE$的外接圆.

探索新知

你能作出正五边形的内切圆吗？

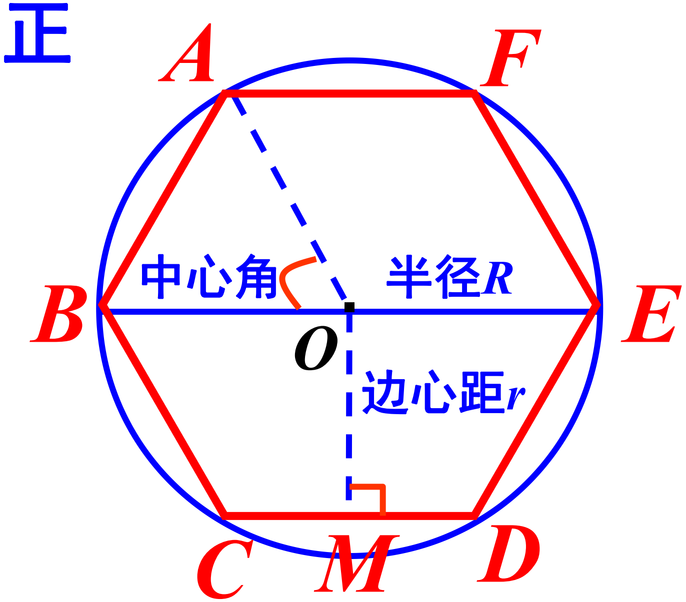


概念学习

①我们把一个正多边形的外接圆（内切圆）的圆心叫做这个正多边形的中心（即点O）

②外接圆的半径叫做正多边形的半径（即OA）

③正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角（即$\angle AOB$）



④中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距（内切圆的半径、即OM）

同步练习

正n边形的每一个内角的度数都是 $\frac{(n-2)\bullet 180^\circ}{n}$；

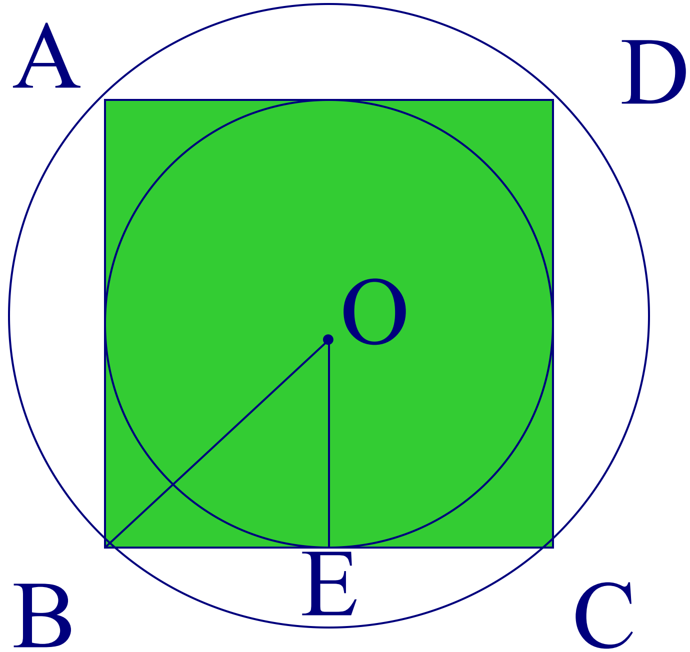
中心角是 $\frac{360^\circ}{n}$；

正多边形的中心角与外角的大小关系是 相等 .

同步练习

1、正方形ABCD的外接圆圆心O叫做正方形ABCD的　中心 ________

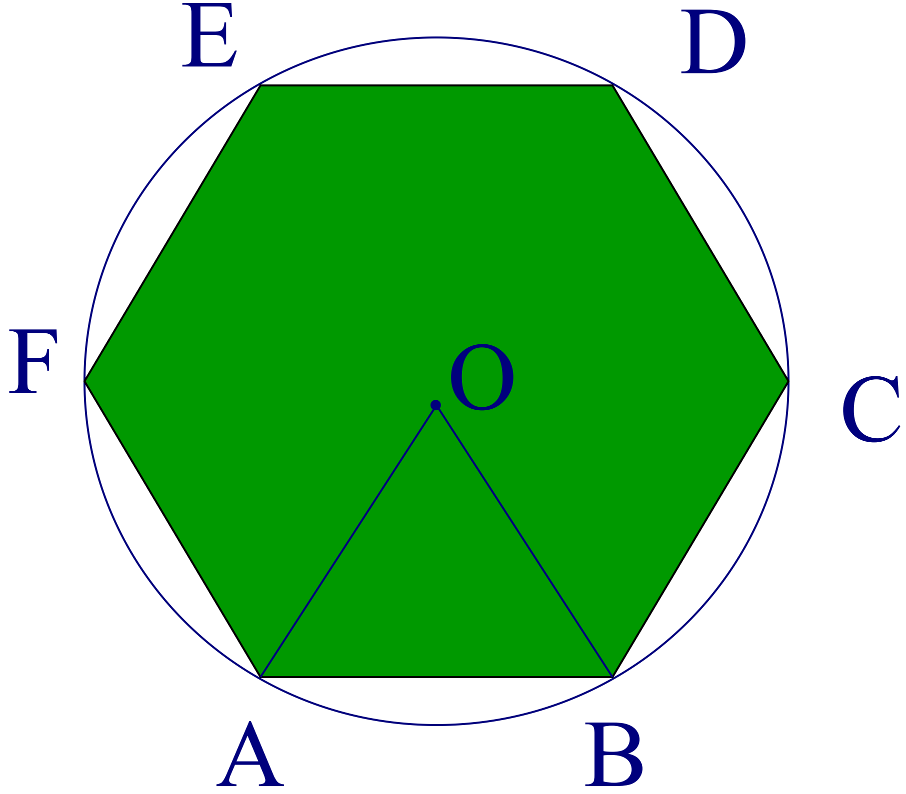
2、正方形ABCD的内切圆的半径OE叫做正方形ABCD的　边心距 ________



3、图中正六边形ABCDEF的中心角是 ∠AOB

它的度数是 60度

4、你发现正六边形ABCDEF的半径与边长具有什么数量关系？为什么？



探索新知

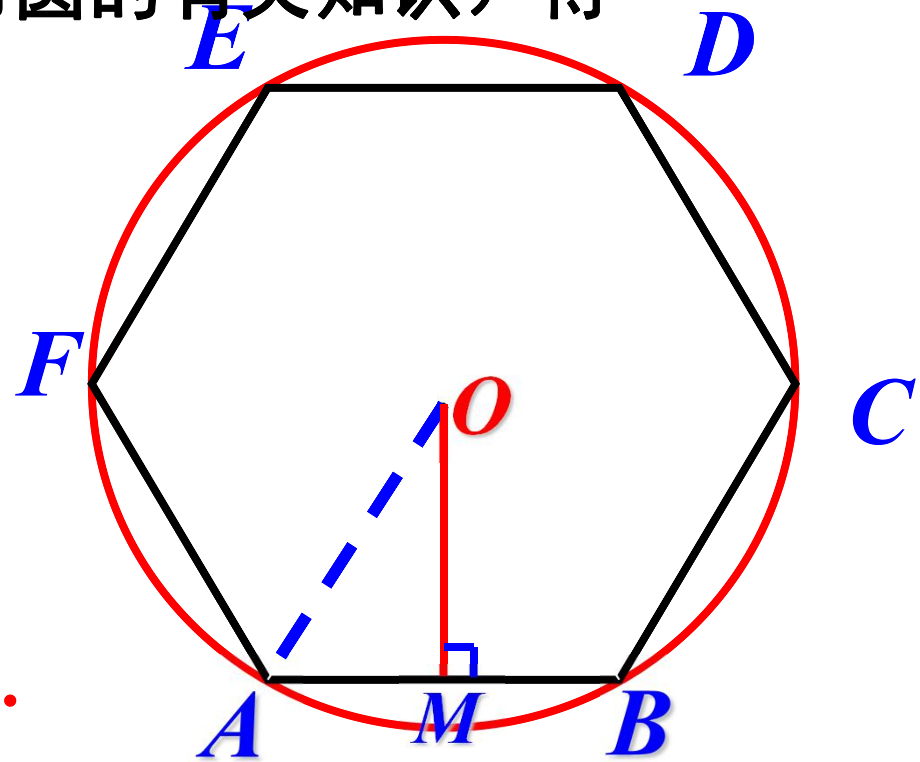
连接OC，由垂径定理（运用圆的有关知识）得

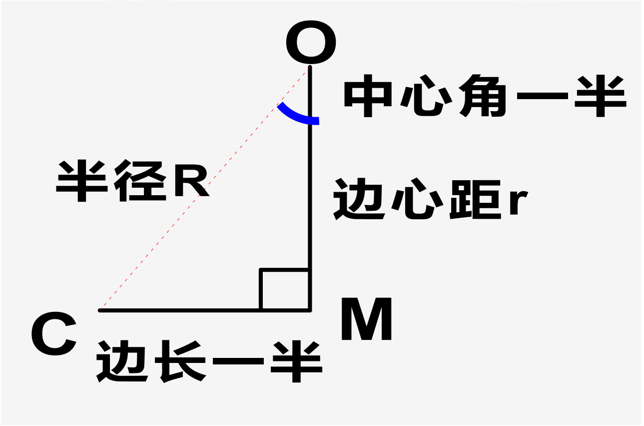
$$AM=\frac{1}{2}AB$$

$$\angle AOM=\frac{1}{2}\times 中心角=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{n}=\frac{180^\circ}{n}$$

$$\mathrm{Rt}\Delta AOM$$

$$OA^2=OM^2+AM^2.$$



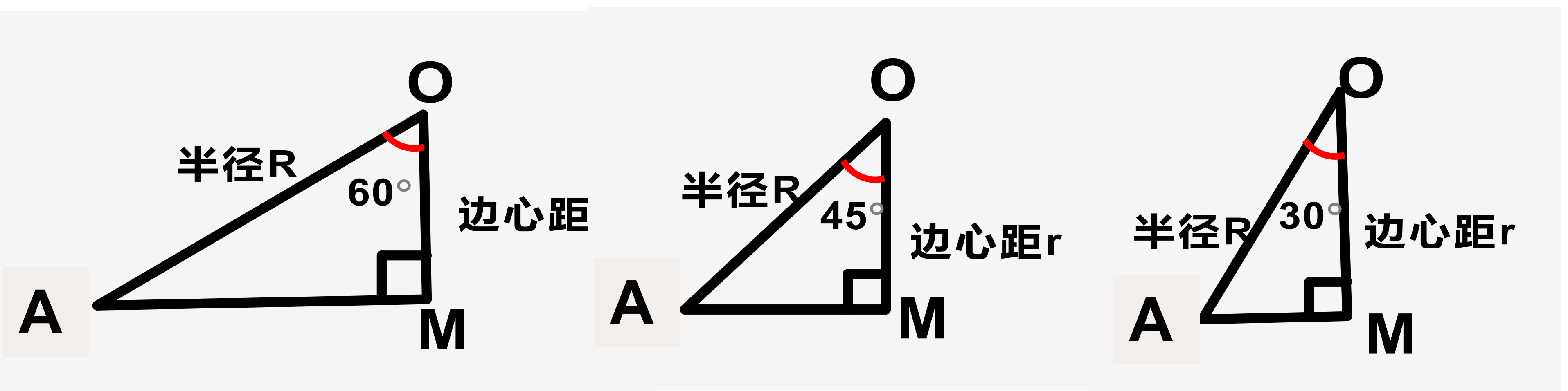


探索新知

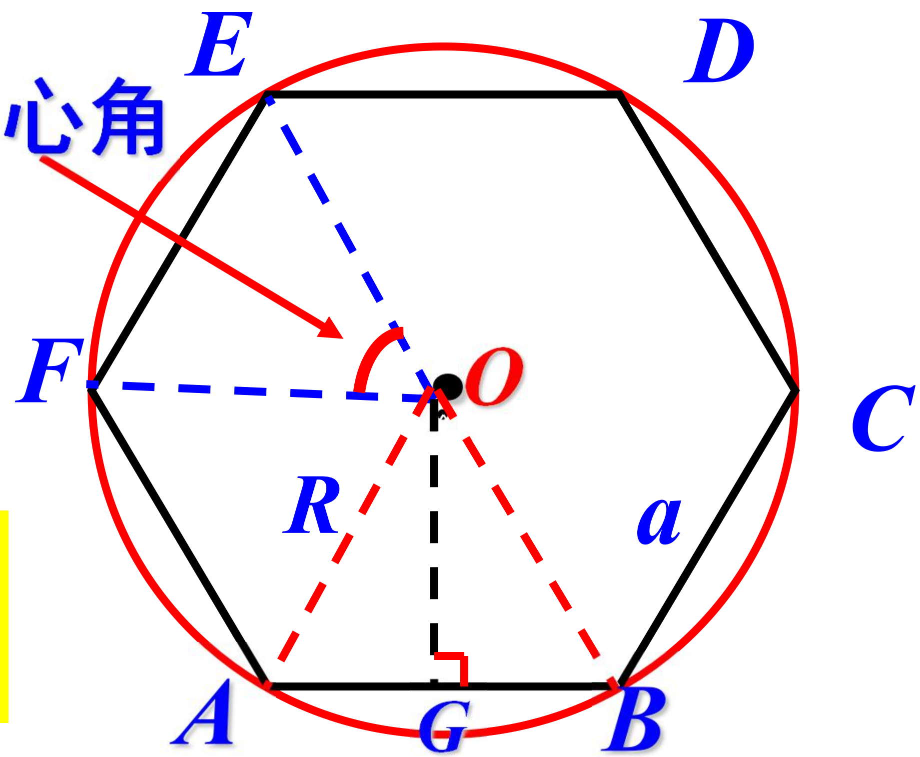
当$n=3$时，$\angle AOM=\frac{1}{2}\times$中心角$=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{3}=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$

当$n=4$时，$\angle AOM=\frac{1}{2}\times$中心角$=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{4}=\frac{180^\circ}{4}=45^\circ$

当$n=6$时，$\angle AOM=\frac{1}{2}\times$中心角$=\frac{1}{2}\times\frac{360^\circ}{6}=\frac{180^\circ}{6}=30^\circ$



$$中心角=\frac{360^{\circ}}{n}$$



边心距OG把$\triangle AOB$分成2个全等的直角三角形

$$\angle AOG=\angle BOG=\frac{180^{\circ}}{n}$$

设正多边形的边长为a, 半径为R, 它的周长为$L=na$.

边心距 $r=\sqrt{R^2-(\frac{a}{2})^2}$,

面积 $S=\frac{1}{2}L\bullet$边心距（r）$=\frac{1}{2}na\bullet$边心距（r）

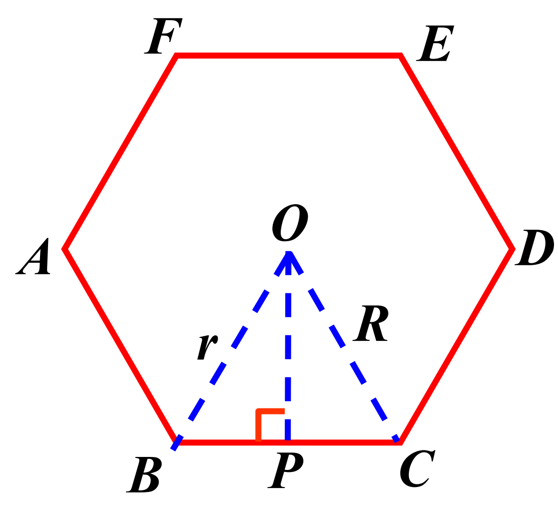
例题讲解

例. 有一个亭子,它的地基半径为4 m的正六边形,求地基的周长和面积(精确到0.1 m²).

解:如图由于$ABCDEF$是正六边形,所以它的中心角等于$\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$;$\triangle OBC$是等边三角形,从而正六边形的边长等于它的半径.

因此,亭子地基的周长

$l=4\times 6=24(\text{m})$.

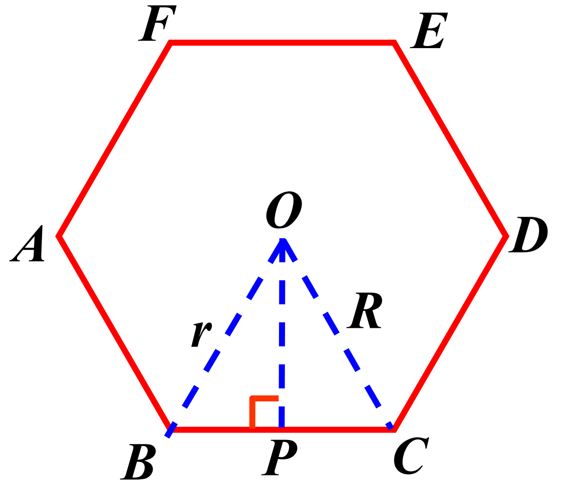


例题讲解

在Rt△OPC中,OC=4，PC= $\frac{BC}{2}=\frac{4}{2}=2$,

利用勾股定理, 可得边心距

$$r=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}.$$



亭子地基的面积

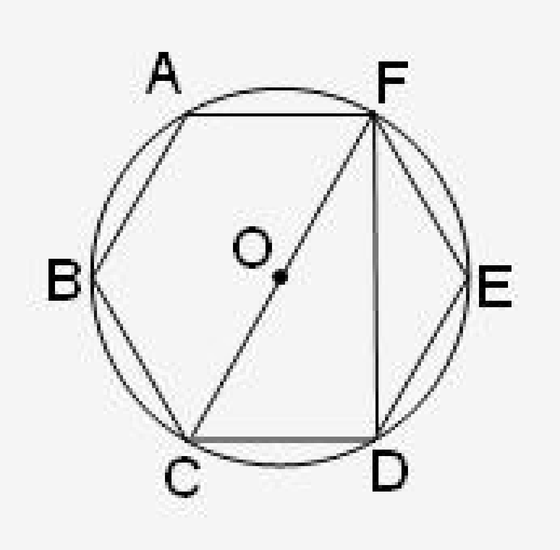
$$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}\times 24\times 2\sqrt{3}\approx 41.6(\mathrm{m}^2).$$

巩固练习

1．正八边形的每个内角是__135°__度.

2．如图，正六边形$ABCDEF$内接于⊙O，则$\angle CFD$的度数是（　C　）

A. 60°　　B. 45°　　C. 30°　　D. 22.5°



巩固练习

3．如果一个正多边形绕它的中心旋转90°就与原来的图形重合，那么这个正多边形是（ B ）

A.正三角形　　B.正方形

C.正五边形　　D.正六边形

4．已知正六边形的边心距为$\sqrt{3}$，则它的周长是__12__.

巩固练习

5．如图，正六边形$ABCDEF$的半径为2，以它的中心O为坐标原点，顶点B、E在x轴上，求正六边形$ABCDEF$的各顶点的坐标.

A（-1，$\sqrt{3}$）

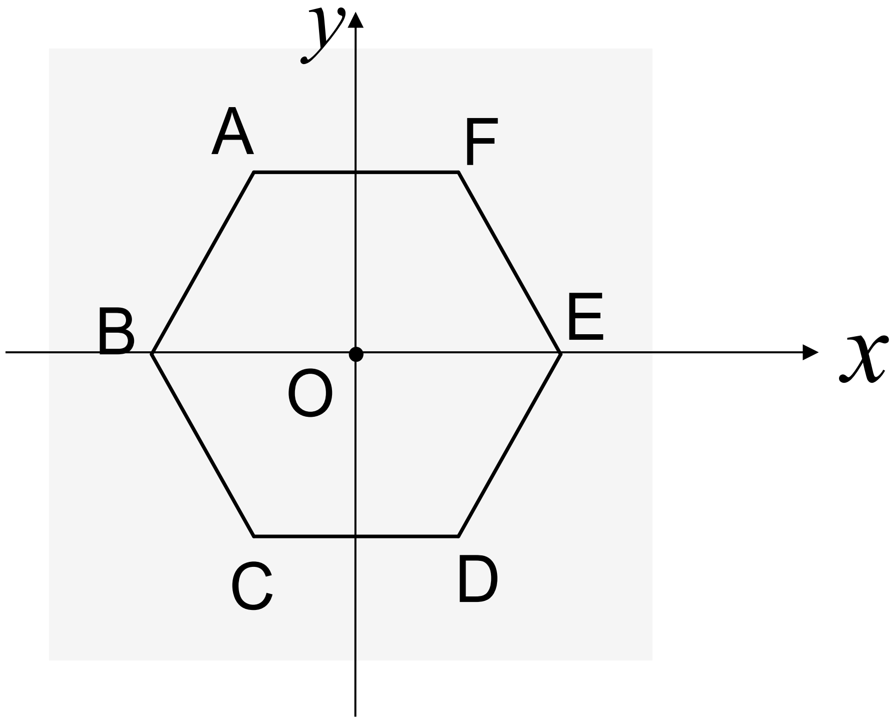
B（-2，0）

C（-1，$-\sqrt{3}$）

D（1，$-\sqrt{3}$）

E（2，0）

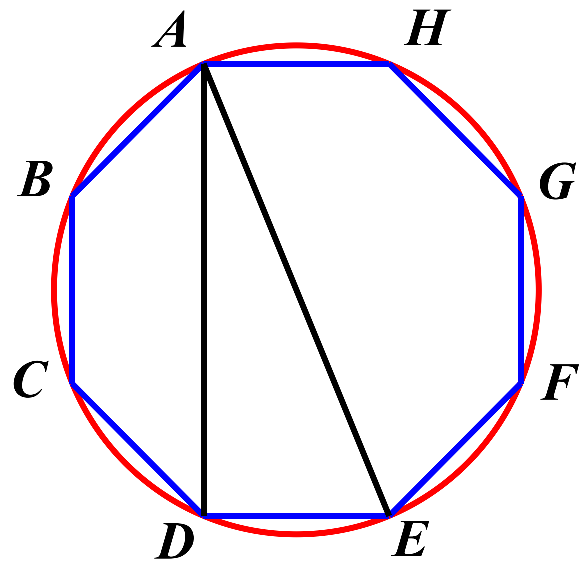
F（1，$\sqrt{3}$）



6．如图，有一圆内接正八边形*ABCDEFGH*，若△*ADE*的面积为10，则正八边形*ABCDEFGH*的面积为（　　　　）

A

A. 40　　　B .50　　　C. 60　　　D. 80

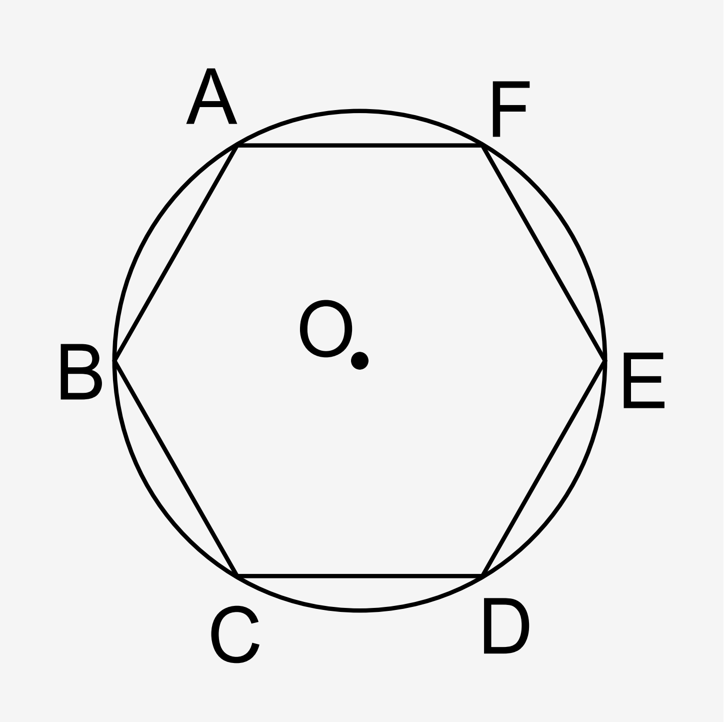


巩固练习

7．边长为6的正三角形的半径是 $\underline{\quad 2\sqrt{3} \quad}$.

8．如图，$\odot O$的周长为6π cm, 求以它的半径为边长的正六边形$ABCDEF$的面积.

$$S=\frac{27\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$$



例题选讲

分别求出半径为R的圆内接正三角形，正方形的边长，边心距和面积.

解：作等边△ABC的BC边上的高AD,垂足为D

连接OB，则OB=R，BC=a

在Rt△OBD中　∠OBD=30°，

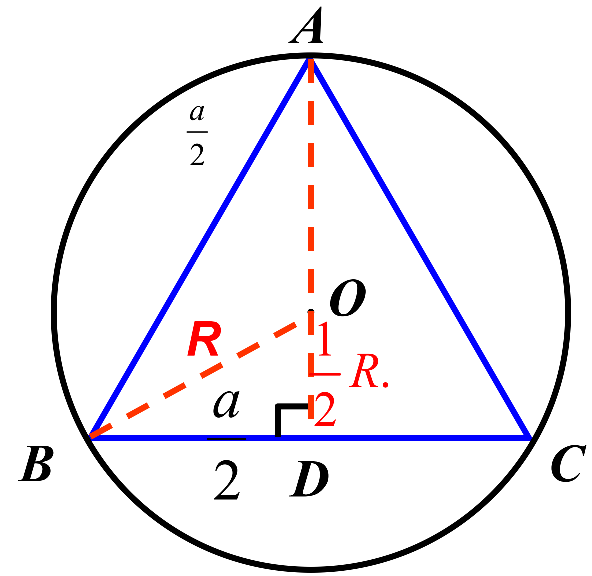
边心距＝OD= $\frac{1}{2}R.$ BD= $\frac{a}{2}$

$$BD^2+OD^2=OB^2$$

$$(\frac{a}{2})^2+(\frac{1}{2}R)^2=R^2$$

$$解之得:a=\sqrt{3}R$$

$$S=\frac{1}{2}BC\times AD=\frac{1}{2}\times a\times(R+\frac{R}{2})=\frac{3}{4}\sqrt{3}R$$



即正三角形的边长为$\underline{\sqrt{3}R}$ *边心距为*$\underline{\frac{1}{2}R.}$ *面积为* $\frac{3}{4}\sqrt{3}R$

解：连接OB，OC 作$OE \perp BC$垂足为E，

$\angle OEB=90^\circ$ $\angle OBE= \angle BOE=45^\circ$

在Rt$\triangle OBE$中为等腰直角三角形

$$BE^2+OE^2=OB^2$$

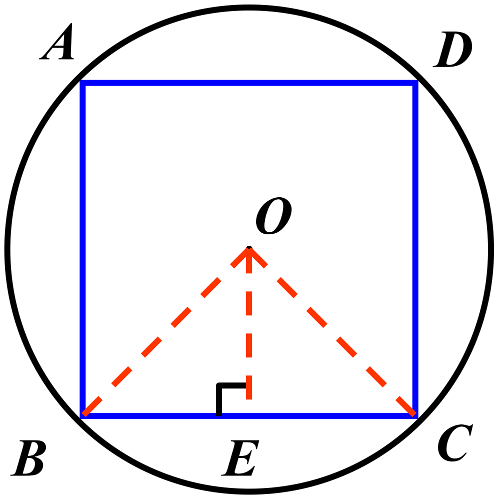
$$2OE^2=OB^2$$

$$OE^2=\frac{OB^2}{2}$$

边心距$OE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}OB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$

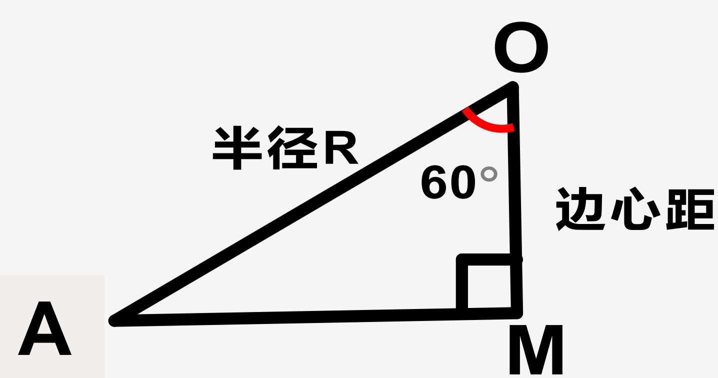
边长$BC=2BE=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}R=\sqrt{2}R$

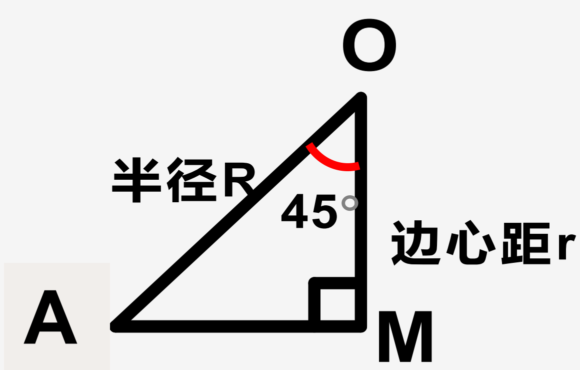
$$S_{\text{正方形}ABCD}=AB\bullet BC=\left(\sqrt{2}R\right)^2=2R^2$$

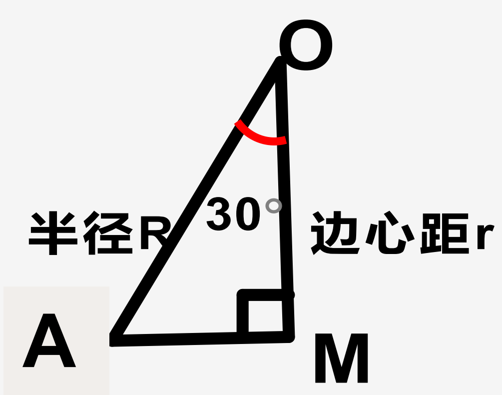


1.课本第3题

正多边形边数	内角	中心角	半径	边长	边心距	周长	面积
正三角形	60°	120°	2	$2\sqrt{3}$	1	$6\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$
正方形	90°	90°	$\sqrt{2}$	2	1	8	4
正六边形	120°	60°	2	2	$\sqrt{3}$	12	$6\sqrt{3}$

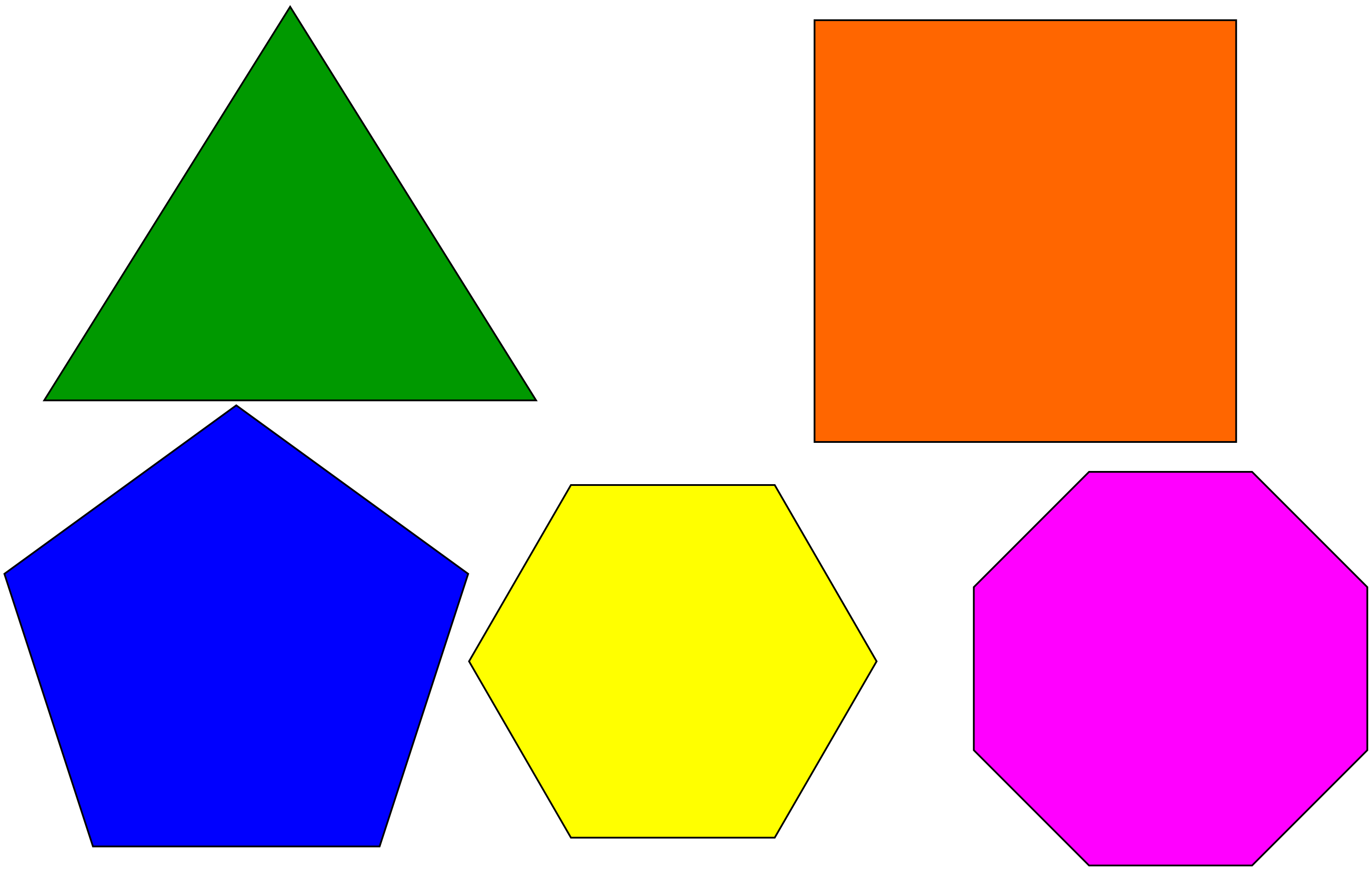






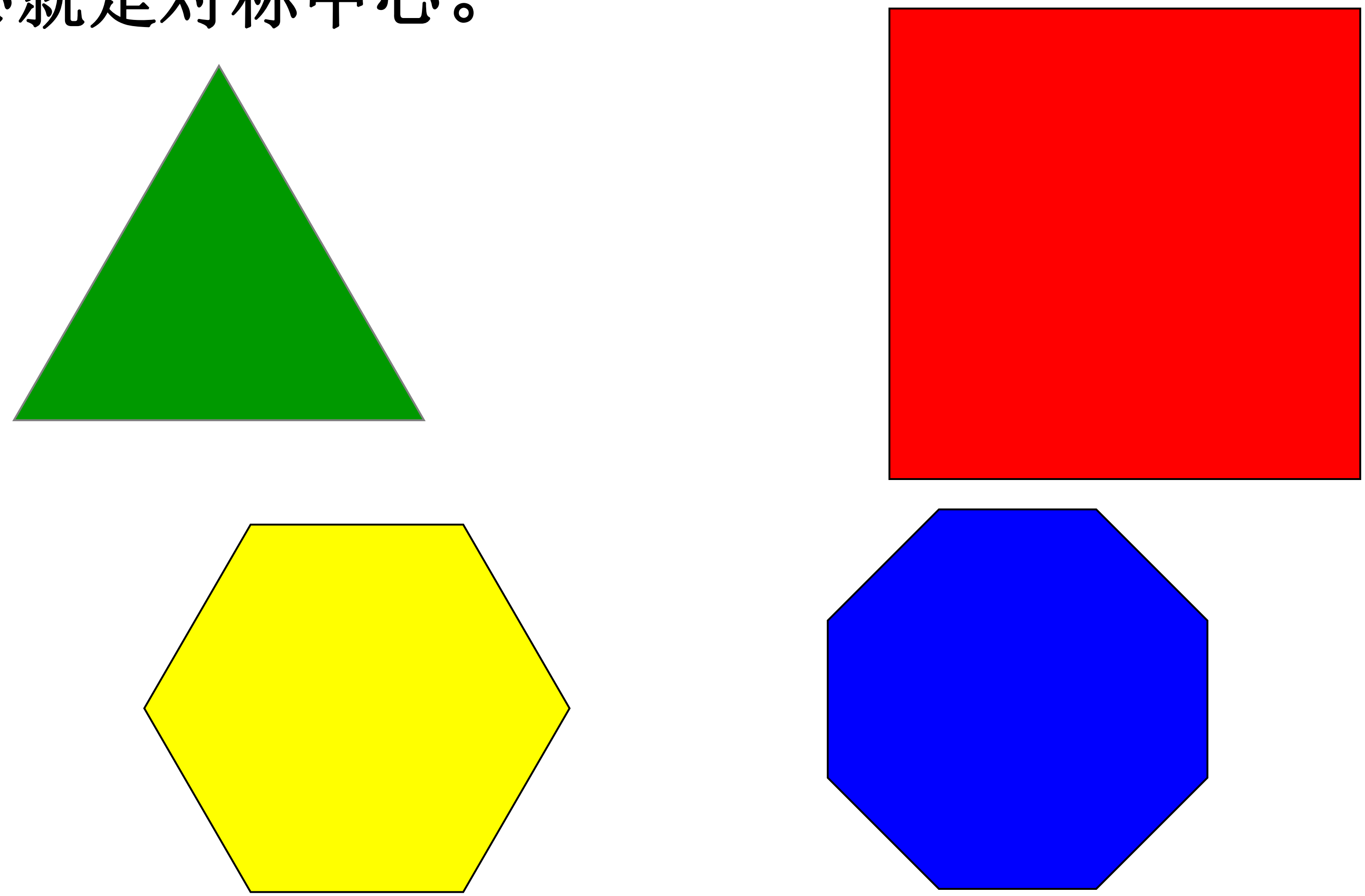
当堂训练

正多边形都是轴对称图形，一个正n边形共有n条对称轴，每条对称轴都通过n边形的中心。

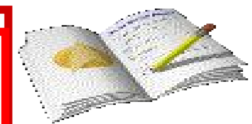


当堂训练

边数是偶数的正多边形还是中心对称图形，它的中心就是对称中心。

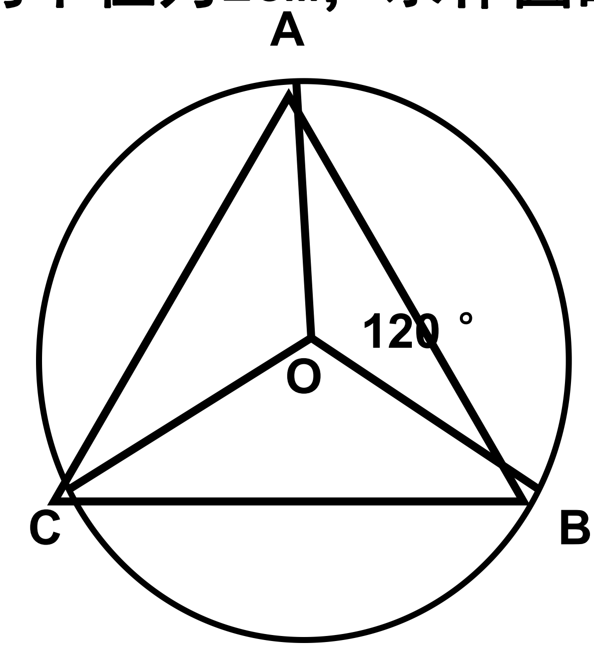


探索新知



怎样画一个正多边形呢？

问题1：已知⊙O的半径为2cm，求作圆的内接正三角形.

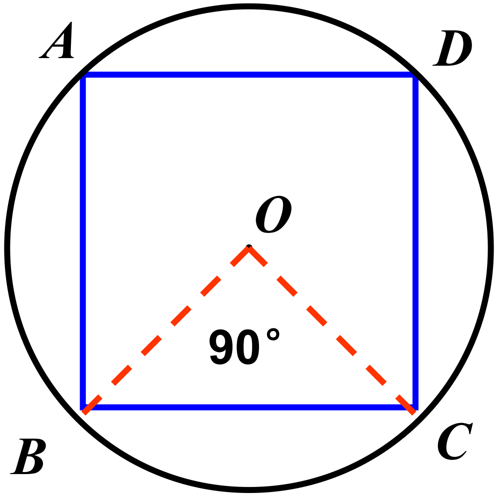


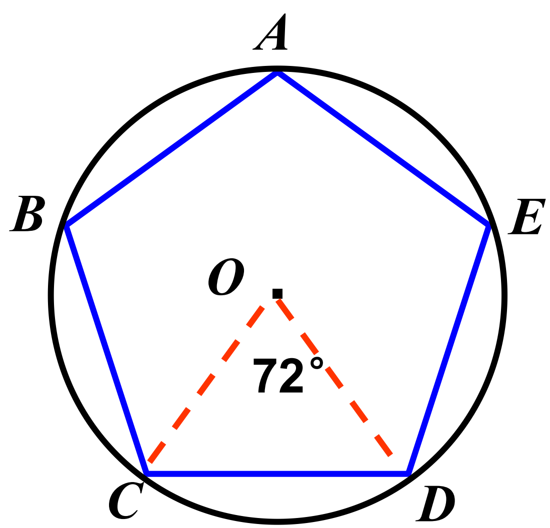
①用量角器度量，使$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120°$．

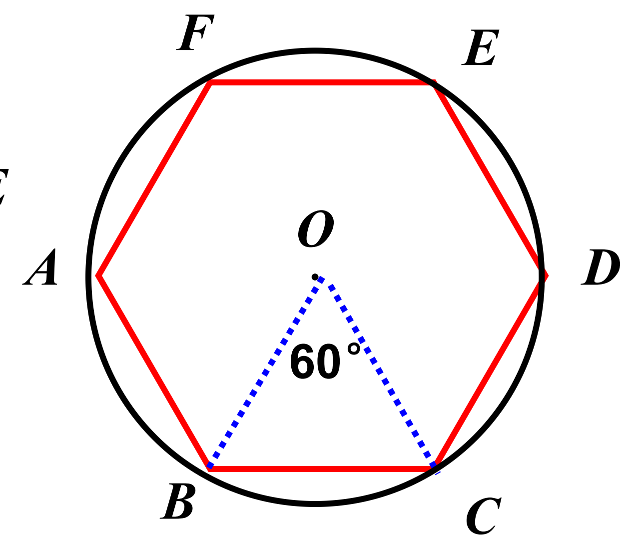
②用量角器或30°角的三角板度量，使$\angle BAO=\angle CAO=30°$．

探索新知

你能用以上方法画出正四边形、正五边形、正六边形吗？

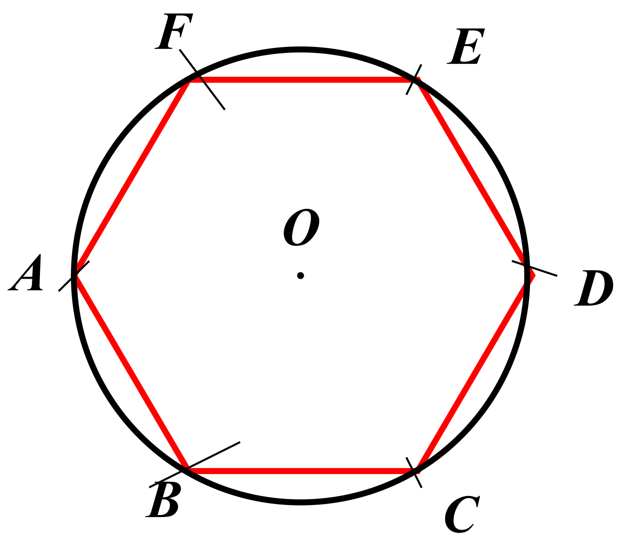






探索新知

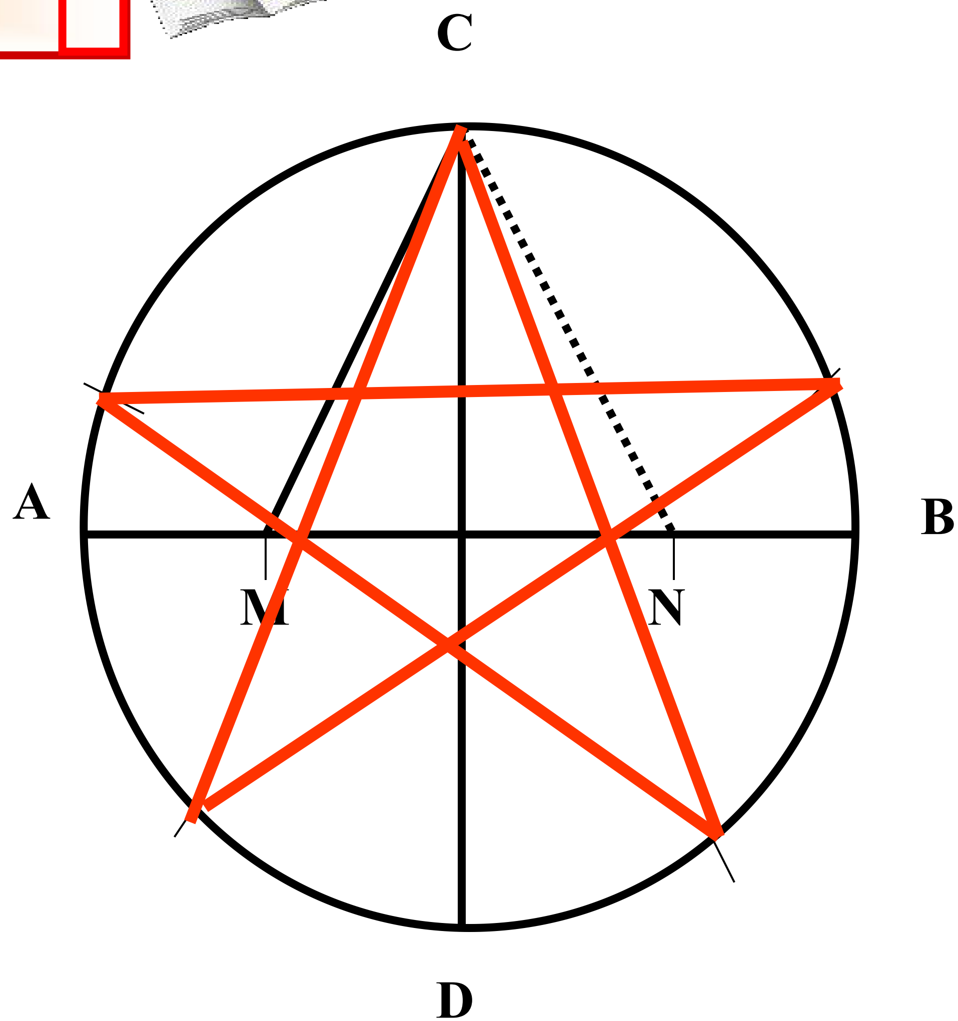
你能尺规作出正六边形、正三角形、正十二边形吗？



以半径长在圆周上截取六段相等的弧，依次连结各等分点，则作出正六边形.

先作出正六边形，则可作正三角形，正十二边形，正二十四边形……….

探索新知



课堂小结

一、正多边形的性质：

1、正多边形的各边相等

2、正多边形的各角相等

二、正多边形的计算：

三、画正多边形的方法

1. 用量角器等分圆
2. 尺规作图等分圆