

义务教育课程标准试验教材(冀教版)

数学 九年级下册

30.1 二次函数

温故知新 什么叫函数?

在某变化过程中的两个变量 x 、 y ，当变量 x 在某个范围内取一个确定的值，另一个变量 y 总有唯一的值与它对应。

这样的两个变量之间的关系我们把它叫做函数关系。

对于上述变量 x 、 y ，我们把 y 叫 x 的函数。 x 叫自变量， y 叫应变量。

目前，我们已经学习了那几种类型的函数？

函数知多少？

变量之间的关系

函数

一次函数

$$y=kx+b \quad (k \neq 0)$$

正比例函数
 $y=kx \quad (k \neq 0)$

反比例函数

$$y=k/x \quad (k \neq 0)$$

二次函数



鱼跃图



你还记得这样的情景吗？当鱼儿跃出平静的水面时，水面会泛起层层圆形波纹，圆形波纹的面积随半径的增大也在不断增大。

圆的半径 x 和圆的面积 y 之间具有什么关系呢？





y 和 x 的关系： $y = \pi x^2$

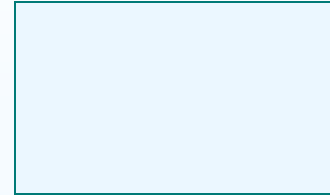
请填写下表，并感受 y 随 x 的变化而变化的过程：

x / cm	1	2	3	4	5	6
y / cm^2	π	4π	9π	16π	25π	36π



一起探究：

x m



1、如图小亮家去年建了一个周长为80m的矩形养鱼池。

(1)、如果设矩形的一边长为 x m,那么另一边长 $(40-x)$ m

(2)、如果设矩形的面积为 y m²那么用 x 表示 y 的表达式为 $y=x(40-x)$ ，化简后为 $y=-x^2+40x$

(3)、根据上面的表达式填写下表：

x	5	10	15	20	25	30	35
y	175	300	375	400	375	300	175

(4)、请指出上表中边长 x 为何值时，矩形的面积 y 最大？

当 $x=20$ 时,矩形的面积 y 最大,为400.



一起探究：

2、某种商品的进价为90元/件，最初的售价为100元/件，后来提价销售，经统计售价和月销售量，得到下面的数据表：

售价（元/件）	100	101	102	103	...
月销售量（件）	500	490	480	470	...



(1)、当售价提高 x 元时，每售出一件这样的商品可获得利润为 $(10+x)$ 元.

(2)、当售价提高 x 元时，月销售量将减少 $10x$ 件，实际销量为 $(500-10x)$ 件.



(3)、当售价为 x 元/件,设每月销售这种商品可获得的总利润为 y 元,用 x 表示 y 的表达式为 $y = \underline{(10+x)(500-10x)}$,
化简为 $y = \underline{-10x^2 + 400x + 5000}$

(4)、根据上面得到的表达式填写下表:

x	10	15	20	25	30
y	8000	8750	9000	8750	8000

(5)、比较一下,上表中的 x 为何值时,获得的总利润 y 最大?

当 $x=20$ 时,获得的总利润 y 最大.



大家谈谈

从以上三个问题中，我们得到了三个表达式： $y = \pi x^2$
 $y = -x^2 + 40x$ ， $y = -10x^2 + 400x + 5000$ ，观察上述三个函数表达式
请谈谈各式

有哪些共
同之处





定义：

一般地，如果两个变量 x 和 y 之间的函数关系可以表示成 $y=ax^2+bx+c$ （ a, b, c 是常数， $a \neq 0$ ），那么称 y 是 x 的**二次函数**。

我们把形如 $y=ax^2+bx+c$ (其中 a, b, c 是常数,
 $a \neq 0$) 的函数叫做二次函数

二次项: ax^2

二次项系数: a

一次项: bx

一次项系数: b

常数项: c

二次函数的x的范围为：**一切实数。**

注意：

1. 自变量的最高次数是2。
2. 二次项的系数 $a \neq 0$ ，可以没有一次项和常数项，但不能没有二次项。
3. 二次函数解析式必须是整式。

二次函数的一般形式:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (\text{其中 } a、b、c \text{ 是常数, } a \neq 0)$$

其中 x 是自变量, a 为二次项系数, ax^2 叫做二次项
 b 为一次项系数, bx 叫做一次项, c 为常数项。

二次函数的特殊形式:

$$\text{∞ 当 } b = 0 \text{ 时, } y = ax^2 + c$$

$$\text{∞ 当 } c = 0 \text{ 时, } y = ax^2 + bx$$

$$\text{∞ 当 } b = 0, c = 0 \text{ 时, } y = ax^2$$

例题讲解

例1、下列函数中，哪些是二次函数？若是，分别指出二次项系数，一次项系数，常数项。

$$(1) y=3(x-1)^2+1$$

$$(2) y=x+\frac{1}{x}$$

$$(3) s=3-2t^2$$

$$(4) y=(x+3)^2-x^2$$

$$(5) y=\frac{1}{x^2}-x$$

$$(6) v=8\pi r^2$$

解: $((1))y=3(x-1)^2+1$
 $=3(x^2-2x+1)+1$
 $=3x^2-6x+3+1$
即 $y=3x^2-6x+4$

是二次函数.

二次项系数: **3**

一次项系数: **-6**

常数项: **4**

(2) $y=x+\frac{1}{x}$ 不是二次函数.

(3) $s=3-2t^2$ 是二次函数.

二次项系数: **-2**

一次项系数: **0**

常数项: **3**

$$(4) y=(x+3)^2-x^2=x^2+6x+9-x^2$$

即 $y=6x+9$

不是二次函数.

$$(5)y=\frac{1}{x^2}-x$$

不是二次函数.

$$(6) v=8\pi r^2$$

是二次函数.

二次项系数: **8π**

一次项系数: **0**

常数项: **0**



分层提高

1. 下列函数中, 哪些是二次函数?

(1) $y = x^2$

是

(2) $y = -\frac{1}{x^2}$

不是

(3) $y = x(1-x)$

是

$y = -x^2 + x$

(4) $y = (x-1)^2 - x^2$

不是

$y = x^2 - 2x + 1 - x^2$

$= -2x + 1$

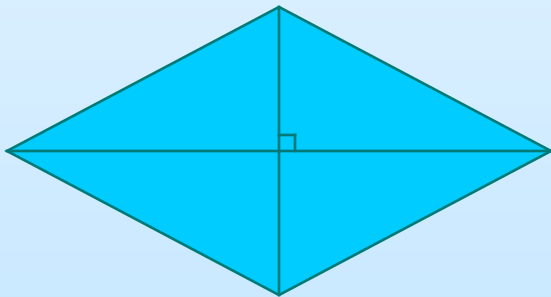
先化简后判断

2 写出下列各函数关系式，并说出是什么函数

(1) 写出正方体的表面积 S 与正方体棱长 a 之间的函数关系？

解： $S=6a^2$ 它是一个关于 a 的二次函数

(2) 菱形的两条对角线的和为 26 cm ，求菱形的面积 S 与一对角线 x 之间的函数的关系？



$$\begin{aligned} \text{解： } S &= \frac{1}{2} x(26-x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 13x \end{aligned}$$

它是一个关于 x 的二次函数。

例：若函数 $y = (m^2 - 9)x^2 + (m - 2)x + 4$ 是二次函数，求 m 的取值范围。

解：由题意得： $m^2 - 9 \neq 0$

$$\therefore m \neq \pm 3$$

练习：

若函数 $y = (m^2 - 3m - 4)x^2 + x + 4$ 是二次函数，求 m 的取值范围。

解：由题意得： $m^2 - 3m - 4 \neq 0$

$$\therefore m \neq -1 \text{ 且 } m \neq 4$$

例：若函数 $y = (m^2 - 1)x^{m^2 - m}$ 是二次函数，
求 m 的取值范围。

解：由题意得：

$$\begin{cases} m^2 - m = 2 \\ m^2 - 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m = 2 \text{ 或 } m = -1 \\ m \neq \pm 1 \end{cases}$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $m = 2$

巩固应用

若函数 $y = (m^2 + m)x^{m^2 - 2m - 1} + 4$ 是二次函数，
求 m 的取值范围。

解：由题意得：

$$\begin{cases} m^2 - 2m - 1 = 2 \\ m^2 + m \neq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} m = 3 \text{ 或 } m = -1 \\ m \neq 0 \text{ 且 } m \neq -1 \end{cases}$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $m = 3$

已知函数 $y = (k^2 - k)x^2 + kx + \sqrt{2} - k$

(1) k 为何值时, y 是 x 的一次函数?

(2) k 为何值时, y 是 x 的二次函数?

解 (1) 根据题意得
$$\begin{cases} k^2 - k = 0 \\ k \neq 0 \end{cases}$$

$\therefore k=1$ 时, y 是 x 的一次函数。

(2) 当 $k^2 - k \neq 0$, 即 $k \neq 0$ 且 $k \neq 1$ 时
 y 是 x 的二次函数

$$y = (m+3) x^{m^2-7}$$

- (1) m 取什么值时，此函数是正比例函数？
- (2) m 取什么值时，此函数是反比例函数？
- (3) m 取什么值时，此函数是二次函数？

解：(1) 当 $m^2-7=1$ 且 $m+3 \neq 0$ 即 $m = \pm 2\sqrt{2}$ 时是正比例函数。

(2) 当 $m^2-7=-1$ 且 $m+3 \neq 0$ 即 $m = \pm \sqrt{6}$ 时是反比例函数。

(3) 当 $m^2-7=2$ 且 $m+3 \neq 0$ 即 $m=3$ 时是二次函数。

圆柱的体积 V 是用公式 $V = \pi r^2 h$ 来计算的，这里 r 是圆柱底面的半径， h 是圆柱的高。

(1) 当 r 是常量时， V 是 h 的什么函数。

(2) 当 h 是常量时， V 是 r 的什么函数。

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi r^2 h$$

解：(1) 当 r 是常量时， V 是 h 的一次函数。

解：(2) 当 h 是常量时， V 是 r 的二次函数。

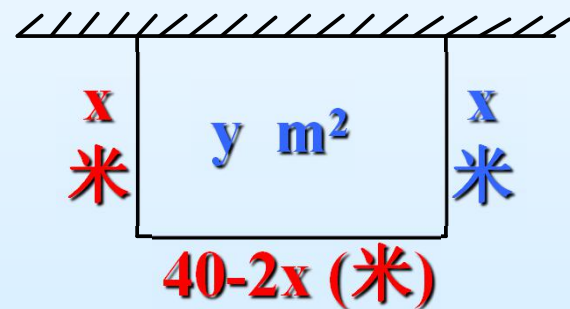
一农民用40米长的篱笆围成一个一边靠墙的长方形菜园，和墙垂直的一边长为 x 米，菜园的面积为 y 平方米，求 y 与 x 之间的函数关系式。当 $x=12$ 时，计算菜园的面积。

解：由题意得： $y=x(40-2x)$

即： $y=40x-2x^2$ ($0<x<20$)

当 $x=12$ 时，菜园的面积为：

$$\begin{aligned}y &= 40x - x^2 = 40 \times 12 - 2 \times 12^2 \\ &= 192 \text{ (平方米)}\end{aligned}$$



长方形的长为9cm，宽为4cm，长和宽都减少x cm，则剩余面积为y。写出y关于x的函数关系式。

解： $y=(9-x)(4-x)$

$$y=36-13x+x^2$$

即： $y=x^2-13x+36$ $(0 \leq x < 4)$

小结：

1.定义：一般地,形如 $y=ax^2+bx+c$ (a,b,c 是常数, $a\neq 0$)的函数叫做 x 的二次函数.

$y=ax^2+bx+c$ (a,b,c 是常数, $a\neq 0$)的几种不同表示形式:

(1) $y=ax^2$ ($a\neq 0,b=0,c=0$).

(2) $y=ax^2+c$ ($a\neq 0,b=0,c\neq 0$).

(3) $y=ax^2+bx$ ($a\neq 0,b\neq 0,c=0$).

2.定义的实质是： ax^2+bx+c 是整式,自变量 x 的最高次数是二次,自变量 x 的取值范围是全体实数.