核心素养小专题(三)

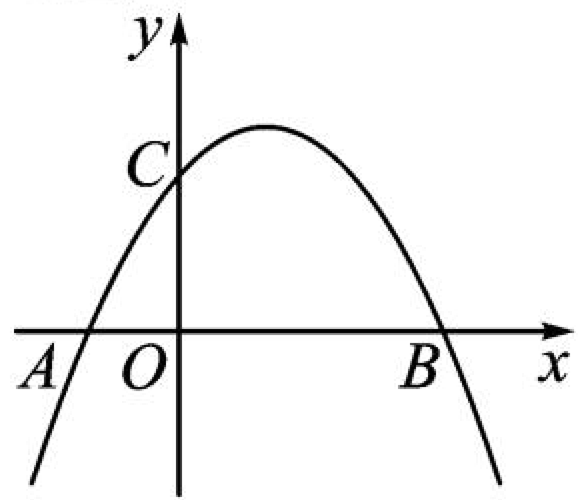
二次函数综合题分类专练

类型1 二次函数的图象与性质

1. (湘潭市中考改编)如图,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,\sqrt{3})$ 三点.

(1)求该抛物线的解析式;

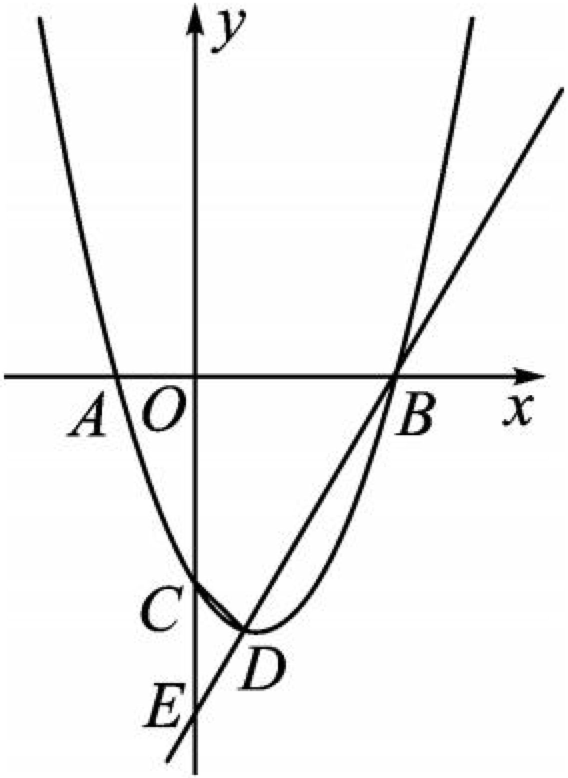
(2)$P(x_1,y_1)$,$Q(4,y_2)$两点均在该抛物线上,若 $y_1\geqslant y_2$,求 P 点横坐标 x_1 的取值范围.

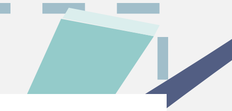


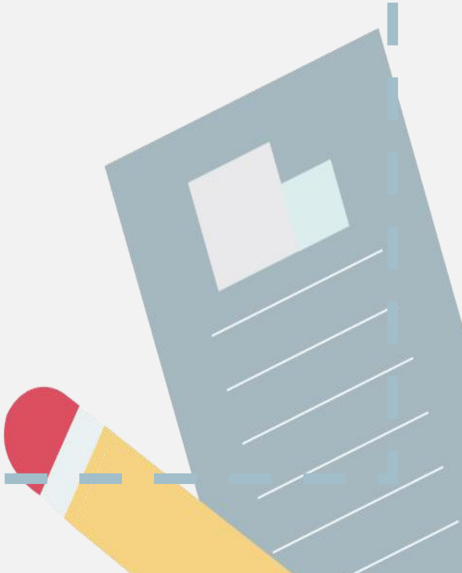
2.（德州市中考改编）如图，抛物线 $y=mx^2-\frac{5}{2}mx-4$ 与 x 轴交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$ 两点，与 y 轴交于点 C，且 $x_2-x_1=\frac{11}{2}$.

(1)求抛物线的解析式;

(2)若 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$是抛物线上的两点,当 $a\leqslant x_1\leqslant a+2$,$x_2\geqslant\frac{9}{2}$时,均有 $y_1\leqslant y_2$,求 a 的取值范围.

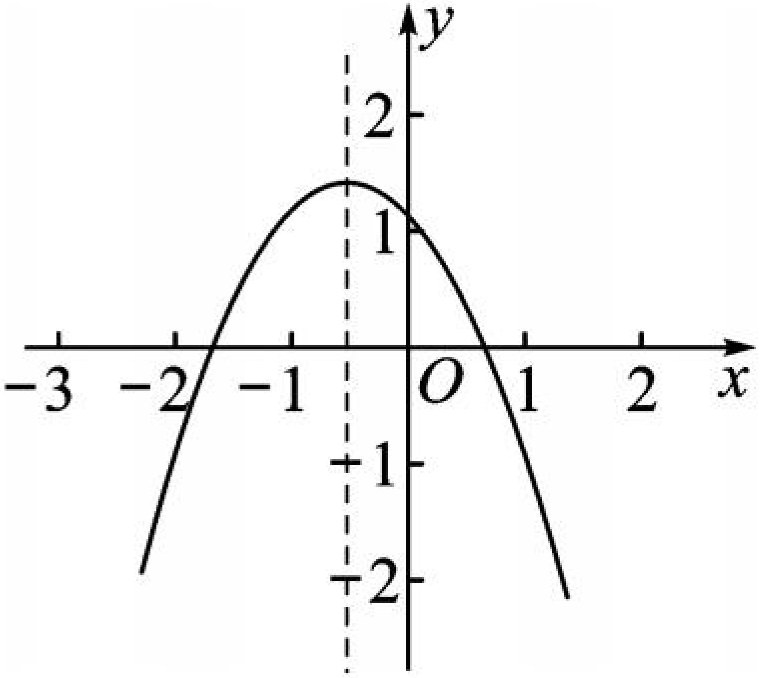






类型 2 二次函数中与 a,b,c 有关的式子符号的判断

3. (娄底市中考)二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，下列结论中正确的有 ( )



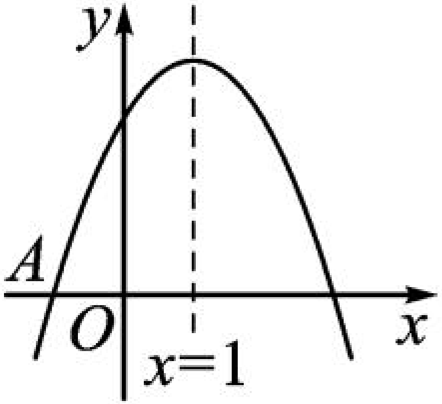
①$abc<0$ ②$b^2-4ac<0$

③$2a>b$ ④$(a+c)^2<b^2$

A. 1 个 B. 2 个

C. 3 个 D. 4 个

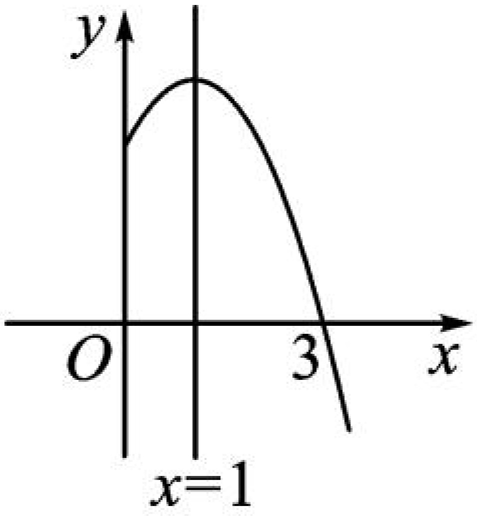
4. 如图，二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的图象与 x 轴交于点 A$(-1,0)$，其对称轴为直线 $x=1$，下面结论中正确的是（　　）



A. $abc>0$　　B. $2a-b=0$

C. $4a+2b+c<0$　　D. $9a+3b+c=0$

5. (贺州市中考)已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的对称轴是直线 $x=1$，其部分图象如图所示，下列说法中：①$abc<0$；②$a-b+c<0$；③$3a+c=0$；④当 $-1<x<3$ 时，$y>0$，正确的是__________.（填序号）



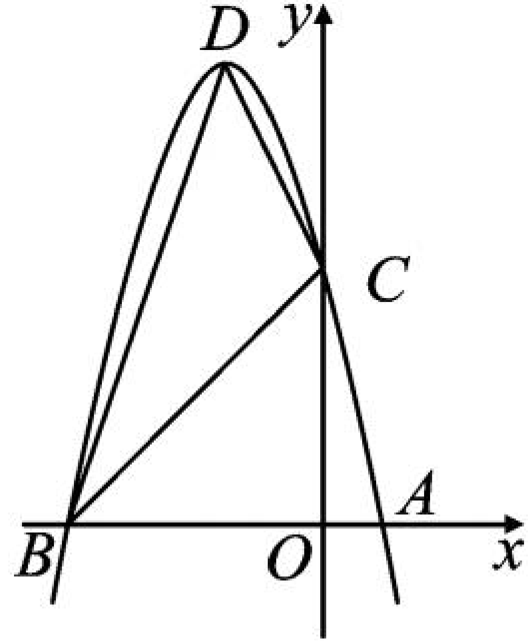
类型 3 求二次函数的解析式

6.（淮安市中考改编）已知二次函数的图象与 x 轴交于 A、B 两点，D 为顶点，其中点 B 的坐标为 $(5,0)$，点 D 的坐标为 $(1,3)$. 求该二次函数的解析式.

7. （镇江市期末）如图，二次函数 $y=ax^2-4x+c(a\neq 0)$ 的图象与 x 轴交于 $A(1,0)$，B 两点，与 y 轴交于点 $C(0,5)$，其顶点为 D.

(1)求这个二次函数的解析式；

(2)求$\triangle BCD$ 的面积.

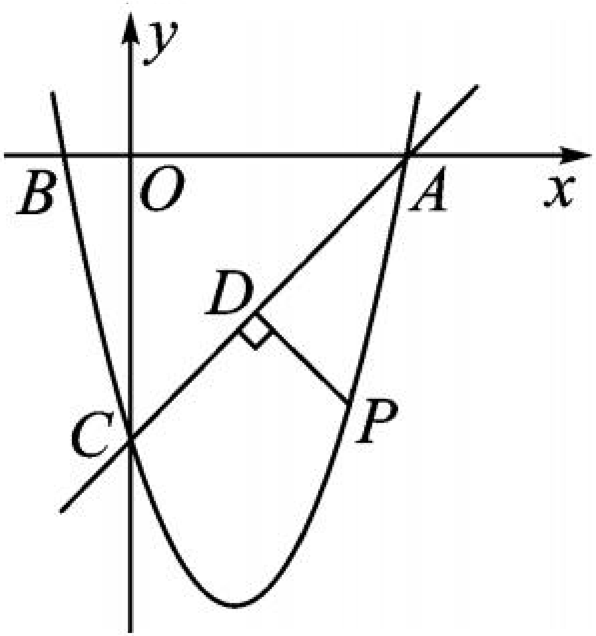


8. (贺州市中考)如图,在平面直角坐标系中,已知点 B 的坐标为 $(-1,0)$,且 $OA=OC=4OB$,抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 图象经过 A,B,C 三点.

(1)求 A,C 两点的坐标;

(2)求抛物线的解析式;

(3)若点 P 是直线 AC 下方的抛物线上的一个动点，作 $PD\perp AC$ 于点 D，当 PD 取值最大时，求此时点 P 的坐标及 PD 的最大值.



类型4 综合与创新

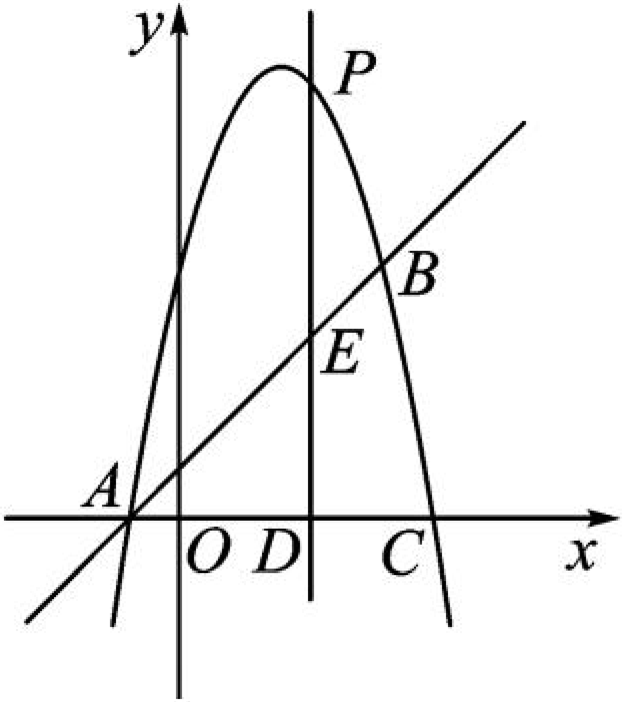
9.（亮点题）如图，抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与直线 $y=x+1$ 相交于 $A(-1,0)$，$B(4,m)$ 两点，且抛物线经过点 $C(5,0)$.

(1) 求抛物线的解析式；

(2) 点 P 是抛物线上的一个动点（不与点 A，点 B 重合），过点 P 作直线 $PD\perp x$ 轴于点 D，交直线 AB 于点 E.

①当 $PE=2ED$ 时，求 P 点坐标；

②是否存在点 P 使 $\triangle BEC$ 为等腰三角形？若存在，请直接写出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.


y
P
B
E
A
O
D
C
x

[illegible]

[illegible]

[illegible]

【解析】设点 $P(a,-a^2+4a+5)$，则 $E(a,a+1)$，$\because B(4,5)$，$C(5,0)$，$\therefore BE^2=(a-4)^2+(a+1-5)^2=2a^2-16a+32$，$CE^2=(a-5)^2+(a+1)^2=2a^2-8a+26$，$BC^2=1+5^2=26$，若 $\triangle BEC$ 为等腰三角形，则分三种情况讨论：（ⅰ）当 $BE=CE$ 时，$BE^2=CE^2$，即 $2a^2-16a+32=2a^2-8a+26$，解得 $a=\frac{3}{4}$；（ⅱ）当 $BC=BE$ 时，$BC^2=BE^2$，即 $26=2a^2-16a+32$，解得 $a=4+\sqrt{13}$ 或 $a=4-\sqrt{13}$；（ⅲ）当 $BC=CE$ 时，$BC^2=CE^2$，即 $26=2a^2-8a+26$，解得 $a=0$ 或 $a=4$（舍去）．综上所述，符合条件的点 P 的坐标为 $P_1(\frac{3}{4},\frac{119}{16})$，$P_2(4+\sqrt{13},-4\sqrt{13}-8)$，$P_3(4-\sqrt{13},4\sqrt{13}-8)$，$P_4(0,5)$．