2018年江苏省常州市中考数学试卷

一、选择题（本大题共8小题，每小题2分，共16分.在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的）

1. 的倒数是（ ）

A ．

B ．

C ．

D ．

2. 已知苹果每千克元，则千克苹果共多少元？（ ）

A ．

B ．

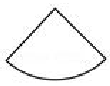
C ．

D ．

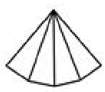
3. 下列图形中，哪一个是圆锥的侧面展开图？（ ）

A ．

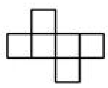
B ．



C ．



D ．



4. 一个正比例函数的图象经过，则它的表达式为（ ）

A ．

B ．

C ．

D ．

5. 下列命题中，假命题是（ ）

A ．一组对边相等的四边形是平行四边形

B ．三个角是直角的四边形是矩形

C ．四边相等的四边形是菱形

D　. 有一个角是直角的菱形是正方形

6.　已知为整数，且，则等于（ ）

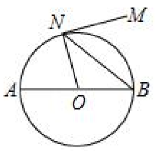
A　.

B　.

C　.

D　.

7.　如图，是的直径，是的切线，切点为，如果，则的度数为（ ）



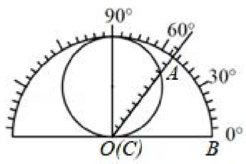
A　.

B　.

C　.

D　.

8.　某数学研究性学习小组制作了如下的三角函数计算图尺：在半径为的半圆形量角器中，画一个直径为的圆，把刻度尺的刻度固定在半圆的圆心处，刻度尺可以绕点旋转．从图中所示的图尺可读出的值是（ ）



A　.

B　.

C　.

D　.

二、填空题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分.不需写出解答过程，请把答案直接写在答题卡相应位置上）

9.　计算：______.

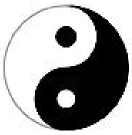
10.　化简：______.

11.　分解因式：______.

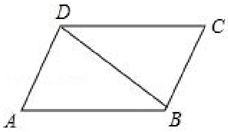
12.　已知点，则点关于轴对称的点的坐标是______.

13.　地球与月球的平均距离大约，用科学记数法表示这个距离为______.

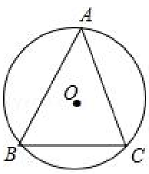
14. 中华文化源远流长，如图是中国古代文化符号的太极图，圆中的黑色部分和白色部分关于圆心中心对称．在圆内随机取一点，则此点取黑色部分的概率是______．



15. 如图，在中，，，则______．

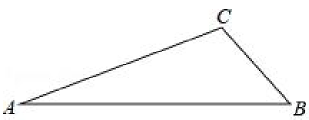


16. 如图，是的内接三角形，，的长是，则的半径是______．



17. 下面是按一定规律排列的代数式：，，，，…则第个代数式是______．

18. 如图，在纸板中，，，，是上一点，过点沿直线剪下一个与相似的小三角形纸板，如果有种不同的剪法，那么长的取值范围是______．



三、解答题（本大题共 10 小题，共 84 分.请在答题卡指定区域内作答，如无特殊说明，解答应写出文字说明、演算步骤或推理过程）

19. 计算：.

20. 解方程组和不等式组：

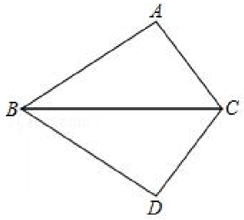
（1）

（2）

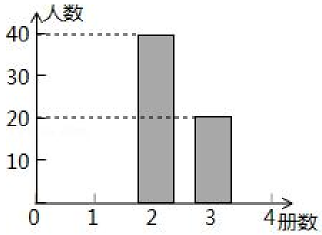
21. 如图，把沿翻折得．

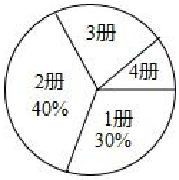
（1）连接，则与的位置关系是______．

（2）不在原图中添加字母和线段，只加一个条件使四边形是平行四边形，写出添加的条件，并说明理由．



22. 为了解某市初中学生课外阅读情况，调查小组对该市这学期初中学生阅读课外书籍的册数进行了抽样调查，并根据调查结果绘制成如下统计图．





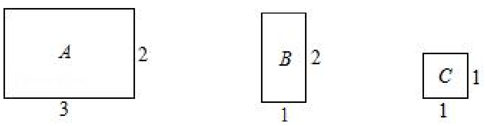
根据统计图提供的信息，解答下列问题：

（1）本次抽样调查的样本容量是______；

（2）补全条形统计图；

（3）该市共有名初中生，估计该市初中学生这学期课外阅读超过册的人数．

23. 将图中的型、型、型矩形纸片分别放在个盒子中，盒子的形状、大小、质地都相同，再将这个盒子装入一只不透明的袋子中．



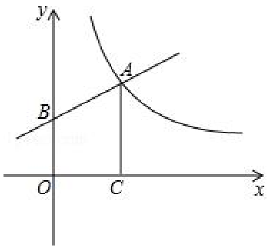
（1）搅匀后从中摸出个盒子，求摸出的盒子中是型矩形纸片的概率；

（2）搅匀后先从中摸出个盒子（不放回），再从余下的两个盒子中摸出一个盒子，求次摸出的盒子的纸片能拼成一个新矩形的概率（不重叠无缝隙拼接）．

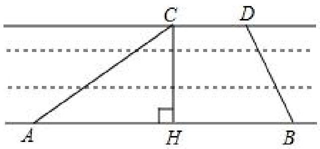
24. 如图，已知点在反比例函数的图象上，过点作轴，垂足是，．一次函数的图象经过点，与轴的正半轴交于点．

（1）求点的坐标；

（2）若四边形的面积是，求一次函数的表达式．



25. 京杭大运河是世界文化遗产．综合实践活动小组为了测出某段运河的河宽（岸沿是平行的），如图，在岸边分别选定了点、和点、，先用卷尺量得，，再用测角仪测得，，求该段运河的河宽（即的长）．



26. 阅读材料：各类方程的解法

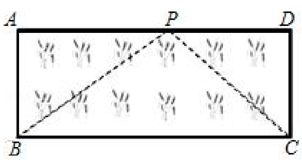
求解一元一次方程，根据等式的基本性质，把方程转化为的形式．求解二元一次方程组，把它转化为一元一次方程来解；类似的，求解三元一次方程组，把它转化为解二元一次方程组．求解一元二次方程，把它转化为两个一元一次方程来解．求解分式方程，把它转化为整式方程来解，由于"去分母"可能产生增根，所以解分式方程必须检验．各类方程的解法不尽相同，但是它们有一个共同的基本数学思想–转化，把未知转化为已知．

用"转化"的数学思想，我们还可以解一些新的方程．例如，一元三次方程，可以通过因式分解把它转化为，解方程和，可得方程的解．

（1）问题：方程的解是，______，______；

（2）拓展：用"转化"思想求方程的解；

（3）应用：如图，已知矩形草坪的长，宽，小华把一根长为的绳子的一端固定在点，沿草坪边沿，走到点处，把长绳段拉直并固定在点，然后沿草坪边沿、走到点处，把长绳剩下的一段拉直，长绳的另一端恰好落在点．求的长．

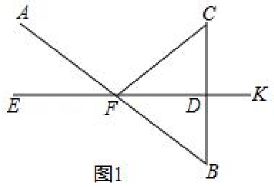


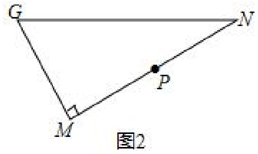
27. （1）如图，已知垂直平分，垂足为，与相交于点，连接．求证：．

（2）如图，在中，，为的中点．

①用直尺和圆规在边上求作点，使得（保留作图痕迹，不要求写作法）；

②在①的条件下，如果，那么是的中点吗？为什么？



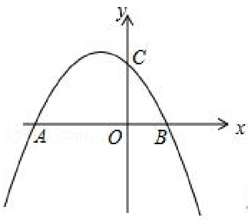


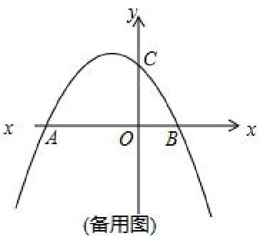
28. 如图，二次函数的图象与轴交于点、，与轴交于点，点的坐标为，是抛物线上一点（点与点、、不重合）.

（1）______，点的坐标是______；

（2）设直线与直线相交于点，是否存在这样的点，使得？若存在，求出点的横坐标；若不存在，请说明理由；

（3）连接、，判断和的数量关系，并说明理由.





答案

1.【答案】C

【解析】根据倒数的定义可得-3的倒数是$-\frac{1}{3}$.

【解答】-3的倒数是$-\frac{1}{3}$.

2.【答案】D

【解析】根据苹果每千克m元，可以用代数式表示出2千克苹果的价钱.

【解答】∵苹果每千克m元，

∴2千克苹果$2m$元，

3.【答案】B

【解析】根据圆锥的侧面展开图的特点作答.

【解答】圆锥的侧面展开图是光滑的曲面，没有棱，只是扇形.

4.【答案】C

【解析】设该正比例函数的解析式为$y=kx(k\neq 0)$，再把点$(2,-1)$代入求出k的值即可.

【解答】设该正比例函数的解析式为$y=kx(k\neq 0)$，

∵正比例函数的图象经过点$(2,-1)$，

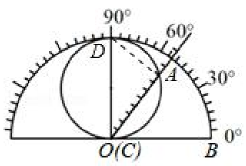
∴$-1=2k$，解得$k=-\frac{1}{2}$，

∴这个正比例函数的表达式是$y=-\frac{1}{2}x$.

5.【答案】A

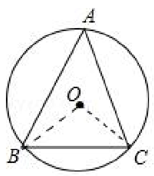
【解析】根据矩形、正方形、平行四边形、菱形的判定即可求出答案.

【解答】A、一组对边平行且相等的四边形是平行四边形，是假命题；
B、三个角是直角的四边形是矩形，是真命题；
C、四边相等的四边形是菱形，是真命题；
D、有一个角是直角的菱形是正方形，是真命题；
6.【答案】B
【解析】直接利用$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$接近的整数是 2，进而得出答案．
【解答】$\because a$ 为整数，且$\sqrt{3} < a < \sqrt{5}$，
$\therefore a = 2$．
7.【答案】A
【解析】先利用切线的性质得$\angle ONM = 90°$，则可计算出$\angle ONB = 38°$，再利用等腰三角形的性质得到$\angle B = \angle ONB = 38°$，然后根据圆周角定理得$\angle NOA$ 的度数．
【解答】$\because MN$ 是$\odot O$ 的切线，
$\therefore ON \perp NM$，
$\therefore \angle ONM = 90°$，
$\therefore \angle ONB = 90° - \angle MNB = 90° - 52° = 38°$，
$\because ON = OB$，
$\therefore \angle B = \angle ONB = 38°$，
$\therefore \angle NOA = 2\angle B = 76°$．
8.【答案】D
【解析】如图，连接 AD．只要证明$\angle AOB = \angle ADO$，可得 $\sin\angle AOB = \sin\angle ADO = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$；
【解答】如图，连接 AD．



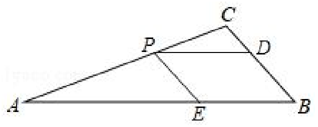
$\because OD$ 是直径，
$\therefore \angle OAD = 90°$，
$\because \angle AOB + \angle AOD = 90°$，$\angle AOD + \angle ADO = 90°$，
$\therefore \angle AOB = \angle ADO$，
$\therefore \sin\angle AOB = \sin\angle ADO = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$，
9.【答案】2
【解析】原式利用绝对值的代数意义，以及减法法则计算即可求出值．
【解答】原式$= 3 - 1 = 2$．
10.【答案】1
【解析】原式利用同分母分式的减法法则计算即可．
【解答】原式$= \frac{a-b}{a-b} = 1$，
11.【答案】$3(x-1)^2$
【解析】先提取公因式 3，再对余下的多项式利用完全平方公式继续分解．
【解答】$3x^2 - 6x + 3$，

$=3(x^2-2x+1)$，
$=3(x-1)^2$.
12.【答案】$(-2,-1)$
【解析】根据关于 x 轴对称的点的横坐标相等，纵坐标互为相反数，可得答案.
【解答】点 $P(-2,1)$，则点 P 关于 x 轴对称的点的坐标是$(-2,-1)$，
13.【答案】3.84×10^5
【解析】科学记数法的一般形式为：$a\times10^n$，在本题中 a 应为 3.84，10 的指数为 $6-1=5$.
【解答】$384\,000=3.84\times10^5km$.
14.【答案】$\frac{1}{2}$
【解析】根据中心对称图形的性质得到圆中的黑色部分和白色部分面积相等，根据概率公式计算即可.
【解答】∵圆中的黑色部分和白色部分关于圆心中心对称，
∴圆中的黑色部分和白色部分面积相等，
∴在圆内随机取一点，则此点取黑色部分的概率是$\frac{1}{2}$,
15.【答案】$40°$
【解析】根据等腰三角形的性质，平行四边形的性质以及三角形内角和定理即可解决问题.
【解答】∵四边形 $ABCD$ 是平行四边形，
∴$\angle A=\angle C=70°$，
∵$DC=DB$，
∴$\angle C=\angle DBC=70°$，
∴$\angle CDB=180°-70°-70°=40°$，
16.【答案】2
【解析】连接 OB、OC，利用弧长公式转化为方程求解即可；
【解答】连接 OB、OC.

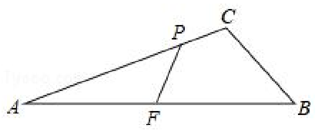


∵$\angle BOC=2\angle BAC=120°$，$\hat{BC}$的长是$\frac{4\pi}{3}$,
∴$\frac{120*\pi*r}{180}=\frac{4\pi}{3}$,
∴$r=2$，
17.【答案】$15a^{16}$
【解析】直接利用已知单项式的次数与系数特点得出答案.
【解答】∵a^2，$3a^4$，$5a^6$，$7a^8$，...
∴单项式的次数是连续的偶数，系数是连续的奇数，
∴第 8 个代数式是：$(2\times8-1)a^{2\times8}=15a^{16}$.

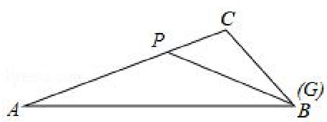
18.【答案】$3 \leq AP < 4$
【解析】分四种情况讨论，依据相似三角形的对应边成比例，即可得到 AP 的长的取值范围．
【解答】如图所示，过 P 作 $PD // AB$ 交 BC 于 D 或 $PE // BC$ 交 AB 于 E，则$\triangle PCD \backsim \triangle ACB$ 或$\triangle APE \backsim \triangle ACB$，
此时 $0 < AP < 4$；



如图所示，过 P 作$\angle APF = \angle B$ 交 AB 于 F，则$\triangle APF \backsim \triangle ABC$，
此时 $0 < AP \leq 4$；



如图所示，过 P 作$\angle CPG = \angle CBA$ 交 BC 于 G，则$\triangle CPG \backsim \triangle CBA$，
此时，$\triangle CPG \backsim \triangle CBA$，
当点 G 与点 B 重合时，$CB^2 = CP \times CA$，即$2^2 = CP \times 4$，
$\therefore CP = 1$，$AP = 3$，
$\therefore$此时，$3 \leq AP < 4$；



综上所述，AP 长的取值范围是 $3 \leq AP < 4$．

19.【答案】原式$= 1 - 2 - 1 + 4 \times \frac{1}{2}$
$= 1 - 2 - 1 + 2$
$= 0$．
【解析】直接利用特殊角的三角函数值以及绝对值的性质、零指数幂的性质分别化简得出答案．

【解答】原式$= 1 - 2 - 1 + 4 \times \frac{1}{2}$
$= 1 - 2 - 1 + 2$
$= 0$．

20.【答案】$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$，
①+②得：$x = 2$，
把 $x = 2$ 代入②得：$y = -1$，

所以方程组的解为：$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$；；$\begin{cases}2x-6>0\\x+2\geq -x\end{cases}$，

解不等式①得：$x>3$；

解不等式②得：$x\geq -1$，

所以不等式组的解集为：$x>3$．

【解析】(1)方程组利用加减消元法求出解即可；

(2)分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分即可．；

【解答】$\begin{cases}2x-3y=7\\x+3y=-1\end{cases}$，

①+②得：$x=2$，

把 $x=2$ 代入②得：$y=-1$，

所以方程组的解为：$\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$；；$\begin{cases}2x-6>0\\x+2\geq -x\end{cases}$，

解不等式①得：$x>3$；

解不等式②得：$x\geq -1$，

所以不等式组的解集为：$x>3$．

21.【答案】BC 垂直平分 AD; 添加的条件是 $AB=AC$，

理由：由折叠知，$\angle ABC=\angle DBC$，$\angle ACB=\angle DCB$，

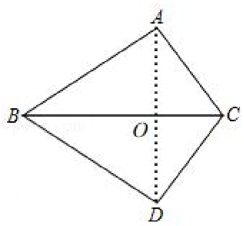
$\because AB=AC$，

$\therefore \angle ABC=\angle ACB$，

$\therefore \angle ACB=\angle DBC=\angle ABC=\angle DCB$，

$\therefore AC//BD$，$AB//CD$，

$\therefore$四边形 $ABDC$ 是平行四边形．



【解析】(1)先由折叠知，$AB=BD$，$\angle ABC=\angle DBC$，进而判断出$\triangle AOB\cong\triangle DOB$，最后用平角的定义即可得出结论；

(2)由折叠得出$\angle ABC=\angle DBC$，$\angle ACB=\angle DCB$，再判断出$\angle ABC=\angle ACB$，进而得出$\angle ACB=\angle DBC=\angle ABC=\angle DCB$，最后用两边分别平行的四边形是平行四边形．；

【解答】如图，

连接 AD 交 BC 于 O，

由折叠知，$AB=BD$，$\angle ABC=\angle DBC$，

$\because BO=BO$，

$\therefore\triangle ABO\cong\triangle DBO(SAS)$，

$\therefore\angle AOB=\angle DOB$，$OA=OD$

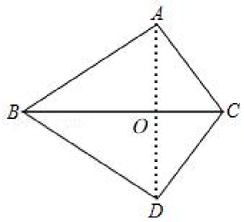
$\because\angle AOB+\angle DOB=180^{\circ}$，

$\therefore\angle AOB=\angle DOB=90^{\circ}$，

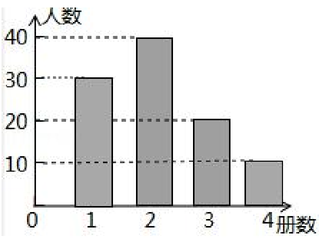
$\therefore BC\perp AD$，

故答案为：BC 垂直平分 AD；；添加的条件是 $AB=AC$，

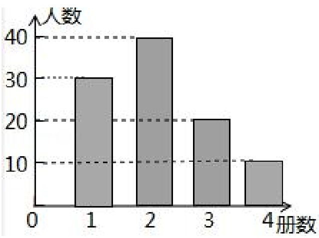
理由：由折叠知，$\angle ABC=\angle DBC$，$\angle ACB=\angle DCB$，
$\because AB=AC$，
$\therefore \angle ABC=\angle ACB$，
$\therefore \angle ACB=\angle DBC=\angle ABC=\angle DCB$，
$\therefore AC//BD$，$AB//CD$，
$\therefore$四边形 $ABDC$ 是平行四边形．



22.【答案】100; 如图：

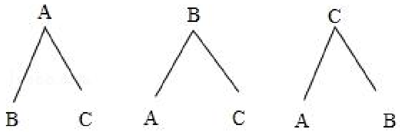


；；$12000\times(1-30\%-40\%)=3600$（人），
答：估计该市初中学生这学期课外阅读超过 2 册的人数是 3600 人．
【解析】(1)根据 2 册的人数除以占的百分比即可得到总人数；
(2)求出 1 册的人数是 $100\times30\%=30$ 人，4 册的人数是 $100-30-40-20=10$ 人，再画出即可；
(3)先列出算式，再求出即可．；；
【解答】$40\div40\%=100$（册），
即本次抽样调查的样本容量是 100，
故答案为：100；；如图：



；；$12000\times(1-30\%-40\%)=3600$（人），
答：估计该市初中学生这学期课外阅读超过 2 册的人数是 3600 人．
23.【答案】搅匀后从中摸出 1 个盒子有 3 种等可能结果，

所以摸出的盒子中是 A 型矩形纸片的概率为$\frac{1}{3}$；；画树状图如下：

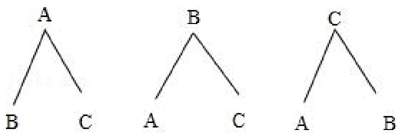


由树状图知共有 6 种等可能结果，其中 2 次摸出的盒子的纸片能拼成一个新矩形的有 4 种结果，

所以 2 次摸出的盒子的纸片能拼成一个新矩形的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

【解析】(1)直接利用概率公式计算可得；
(2)画树状图得出所有等可能结果，从中找打 2 次摸出的盒子的纸片能拼成一个新矩形的结果数，利用概率公式计算可得．；
【解答】搅匀后从中摸出 1 个盒子有 3 种等可能结果，

所以摸出的盒子中是 A 型矩形纸片的概率为$\frac{1}{3}$；；画树状图如下：



由树状图知共有 6 种等可能结果，其中 2 次摸出的盒子的纸片能拼成一个新矩形的有 4 种结果，

所以 2 次摸出的盒子的纸片能拼成一个新矩形的概率为$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

24.【答案】∵点 A 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$的图象上，$AC\perp x$ 轴，$AC=OC$，

∴$AC\cdot OC=4$，
∴$AC=OC=2$，
∴点 A 的坐标为$(2,2)$；；∵四边形 $ABOC$ 的面积是 3，
∴$(OB+2)\times 2\div 2=3$，
解得 $OB=1$，
∴点 B 的坐标为$(0,1)$，
依题意有$\begin{cases}2k+b=2\\b=1\end{cases}$，
解得$\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\b=1\end{cases}$．
故一次函数 $y=kx+b$ 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+1$．

【解析】(1)根据反比例函数 k 值的几何意义可求点 A 的坐标；
(2)根据梯形的面积公式可求点 B 的坐标，再根据待定系数法可求一次函数 $y=kx+b$ 的表达式．；

【解答】∵点 A 在反比例函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$的图象上，$AC\perp x$ 轴，$AC=OC$，

∴$AC\cdot OC=4$，
∴$AC=OC=2$，
∴点 A 的坐标为$(2,2)$；；∵四边形 $ABOC$ 的面积是 3，
∴$(OB+2)\times 2\div 2=3$，

解得 $OB=1$，

∴点 B 的坐标为$(0,1)$，

依题意有$\begin{cases}2k+b=2\\b=1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\b=1\end{cases}$.

故一次函数 $y=kx+b$ 的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+1$.

25.【答案】过 D 作 $DE\perp AB$，可得四边形 $CHED$ 为矩形，

$\therefore HE=CD=40m$，

设 $CH=DE=xm$，

在 $Rt\triangle BDE$ 中，$\angle DBA=60°$，

$\therefore BE=\frac{\sqrt{3}}{3}xm$，

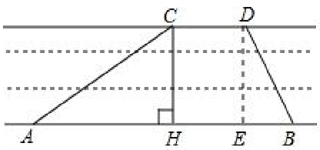
在 $Rt\triangle ACH$ 中，$\angle BAC=30°$，

$\therefore AH=\sqrt{3}xm$，

由 $AH+HE+EB=AB=160m$，得到$\sqrt{3}x+40+\frac{\sqrt{3}}{3}x=160$，

解得：$x=30\sqrt{3}$，即 $CH=30\sqrt{3}m$，

则该段运河的河宽为 $30\sqrt{3}m$.



【解析】过 D 作 $DE\perp AB$，可得四边形 $CHED$ 为矩形，由矩形的对边相等得到两对对边相等，分别在直角三角形 ACH 与直角三角形 BDE 中，设 $CH=DE=xm$，利用锐角三角函数定义表示出 AH 与 BE，由 $AH+HE+EB=AB$ 列出方程，求出方程的解即可得到结果.

【解答】过 D 作 $DE\perp AB$，可得四边形 $CHED$ 为矩形，

$\therefore HE=CD=40m$，

设 $CH=DE=xm$，

在 $Rt\triangle BDE$ 中，$\angle DBA=60°$，

$\therefore BE=\frac{\sqrt{3}}{3}xm$，

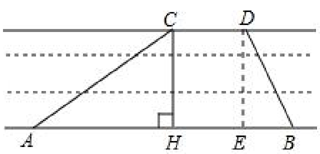
在 $Rt\triangle ACH$ 中，$\angle BAC=30°$，

$\therefore AH=\sqrt{3}xm$，

由 $AH+HE+EB=AB=160m$，得到$\sqrt{3}x+40+\frac{\sqrt{3}}{3}x=160$，

解得：$x=30\sqrt{3}$，即 $CH=30\sqrt{3}m$，

则该段运河的河宽为 $30\sqrt{3}m$.



26.【答案】$-2,1$; $\sqrt{2x+3}=x$，
方程的两边平方，得 $2x+3=x^2$
即$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore x-3=0$ 或 $x+1=0$
$\therefore x_1=3$，$x_2=-1$，
当 $x=-1$ 时，$\sqrt{2x+3}=\sqrt{1}=1\neq-1$，
所以-1 不是原方程的解.
所以方程$\sqrt{2x+3}=x$ 的解是 $x=3$；；因为四边形 $ABCD$ 是矩形，
所以$\angle A=\angle D=90^{\circ}$，$AB=CD=3m$
设 $AP=xm$，则 $PD=(8-x)m$
因为 $BP+CP=10$，
$BP=\sqrt{AP^2+AB^2}$，$CP=\sqrt{CD^2+PD^2}$
$\therefore\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(8-x)^2+9}=10$
$\therefore\sqrt{(8-x)^2+9}=10-\sqrt{9+x^2}$
两边平方，得$(8-x)^2+9=100-20\sqrt{9+x^2}+9+x^2$
整理，得 $5\sqrt{x^2+9}=4x+9$
两边平方并整理，得$x^2-8x+16=0$
即$(x-4)^2=0$
所以 $x=4$.
经检验，$x=4$ 是方程的解.
答：AP 的长为 $4m$.
【解析】(1)因式分解多项式，然后得结论；
(2)两边平方，把无理方程转化为整式方程，求解，注意验根；
(3)设 AP 的长为 xm，根据勾股定理和 $BP+CP=10$，可列出方程，由于方程含有根号，两边平方，把无理方程转化为整式方程，求解，;；
【解答】$x^3+x^2-2x=0$，
$x(x^2+x-2)=0$，
$x(x+2)(x-1)=0$
所以 $x=0$ 或 $x+2=0$ 或 $x-1=0$
$\therefore x_1=0$，$x_2=-2$，$x_3=1$；
故答案为：-2，1；；$\sqrt{2x+3}=x$，
方程的两边平方，得 $2x+3=x^2$
即$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore x-3=0$ 或 $x+1=0$
$\therefore x_1=3$，$x_2=-1$，
当 $x=-1$ 时，$\sqrt{2x+3}=\sqrt{1}=1\neq-1$，
所以-1 不是原方程的解.
所以方程$\sqrt{2x+3}=x$ 的解是 $x=3$；；因为四边形 $ABCD$ 是矩形，
所以$\angle A=\angle D=90^{\circ}$，$AB=CD=3m$
设 $AP=xm$，则 $PD=(8-x)m$
因为 $BP+CP=10$，
$BP=\sqrt{AP^2+AB^2}$，$CP=\sqrt{CD^2+PD^2}$

$\therefore\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(8-x)^2+9}=10$
$\therefore\sqrt{(8-x)^2+9}=10-\sqrt{9+x^2}$
两边平方，得$(8-x)^2+9=100-20\sqrt{9+x^2}+9+x^2$
整理，得 $5\sqrt{x^2+9}=4x+9$
两边平方并整理，得$x^2-8x+16=0$
即$(x-4)^2=0$
所以 $x=4$.
经检验，$x=4$ 是方程的解.
答：AP 的长为 $4m$.
27.【答案】证明：如图 1 中，

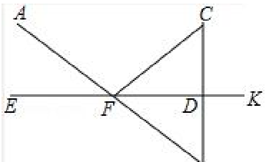


图1

$\because EK$ 垂直平分线段 BC，
$\therefore FC=FB$，
$\therefore\angle CFD=\angle BFD$，
$\because\angle BFD=\angle AFE$，
$\therefore\angle AFE=\angle CFD$. ；①作点 P 关于 GN 的对称点 P'，连接 $P'M$ 交 GN 于 Q，连接 PQ，点 Q 即为所求.

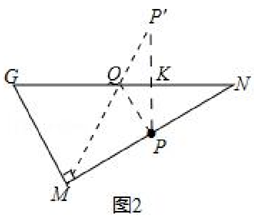


图2

②结论：Q 是 GN 的中点.
理由：设 PP'交 GN 于 K.
$\because\angle G=60°$，$\angle GMN=90°$，
$\therefore\angle N=30°$，
$\because PK\perp KN$，
$\therefore PK=KP'=\frac{1}{2}PN$，
$\therefore PP'=PN=PM$，
$\therefore\angle P'=\angle PMP'$，
$\because\angle NPK=\angle P'+\angle PMP'=60°$，
$\therefore\angle PMP'=30°$，
$\therefore\angle N=\angle QMN=30°$，$\angle G=\angle GMQ=60°$，
$\therefore QM=QN$，$QM=QG$，

$\therefore QG=QN$，
$\therefore Q$ 是 GN 的中点．
【解析】(1)只要证明 $FC=FB$ 即可解决问题；
(2)①作点 P 关于 GN 的对称点 P'，连接 $P'M$ 交 GN 于 Q，连接 PQ，点 Q 即为所求．
②结论：Q 是 GN 的中点．想办法证明$\angle N=\angle QMN=30°$，$\angle G=\angle GMQ=60°$，可得 $QM=QN$，$QM=QG$；；
【解答】证明：如图 1 中，

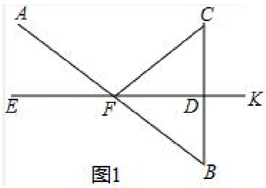


图1

$\because EK$ 垂直平分线段 BC，
$\therefore FC=FB$，
$\therefore \angle CFD=\angle BFD$，
$\because \angle BFD=\angle AFE$，
$\therefore \angle AFE=\angle CFD$．；①作点 P 关于 GN 的对称点 P'，连接 $P'M$ 交 GN 于 Q，连接 PQ，点 Q 即为所求．

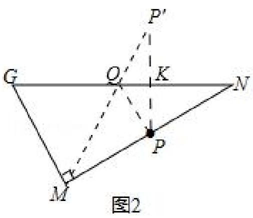


图2

②结论：Q 是 GN 的中点．
理由：设 PP'交 GN 于 K．
$\because \angle G=60°$，$\angle GMN=90°$，
$\therefore \angle N=30°$，
$\because PK\perp KN$，
$\therefore PK=KP'=\frac{1}{2}PN$，
$\therefore PP'=PN=PM$，
$\therefore \angle P'=\angle PMP'$，
$\because \angle NPK=\angle P'+\angle PMP'=60°$，
$\therefore \angle PMP'=30°$，
$\therefore \angle N=\angle QMN=30°$，$\angle G=\angle GMQ=60°$，
$\therefore QM=QN$，$QM=QG$，
$\therefore QG=QN$，
$\therefore Q$ 是 GN 的中点．

28.【答案】$-\frac{5}{6}$，$(\frac{3}{2},0)$；当 $x=0$ 时，$y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+2=2$，

∴点 C 的坐标为$(0,2)$.
设直线 AC 的解析式为 $y=kx+c(k\neq 0)$，
将 $A(-4,0)$、$C(0,2)$代入 $y=kx+c$ 中，
得：$\begin{cases}-4k+c=0\\ c=2\end{cases}$，解得：$\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\ c=2\end{cases}$，
∴直线 AC 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+2$.

假设存在，设点 M 的坐标为$(m,\frac{1}{2}m+2)$.

①当点 P、B 在直线 AC 的异侧时，点 P 的坐标为$(\frac{3}{2}m-\frac{3}{4},\frac{3}{4}m+3)$，

∵点 P 在抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+2$ 上，

∴$\frac{3}{4}m+3=-\frac{1}{3}\times(\frac{3}{2}m-\frac{3}{4})^2-\frac{5}{6}\times(\frac{3}{2}m-\frac{3}{4})+2$，
整理，得：$12m^2+20m+9=0$.
∵$\Delta=20^2-4\times 12\times 9=-32<0$，
∴方程无解，即不存在符合题意得点 P；
②当点 P、B 在直线 AC 的同侧时，点 P 的坐标为$(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4},\frac{1}{4}m+1)$，

∵点 P 在抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+2$ 上，

∴$\frac{1}{4}m+1=-\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4})^2-\frac{5}{6}\times(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4})+2$，
整理，得：$4m^2+44m-9=0$，
解得：$m_1=-\frac{11+\sqrt{130}}{2}$，$m_2=\frac{-11+\sqrt{130}}{2}$，

∴点 P 的横坐标为$-2-\frac{\sqrt{130}}{4}$或$-2+\frac{\sqrt{130}}{4}$.

综上所述：存在点 P，使得 $PM:MB=1:2$，点 P 的横坐标为$-2-\frac{\sqrt{130}}{4}$或$-2+\frac{\sqrt{130}}{4}$．；
（解法一）$\angle CBA=2\angle CAB$，理由如下：
作$\angle CBA$ 的角平分线，交 y 轴于点 E，过点 E 作 $EF\perp BC$ 于点 F，如图 2 所示.
∵点 $B(\frac{3}{2},0)$，点 $C(0,2)$，

∴$OB=\frac{3}{2}$，$OC=2$，$BC=\frac{5}{2}$.
设 $OE=n$，则 $CE=2-n$，$EF=n$，
由面积法，可知：$\frac{1}{2}OB\cdot CE=\frac{1}{2}BC\cdot EF$，即$\frac{3}{2}(2-n)=\frac{5}{2}n$，

解得：$n=\frac{3}{4}$.

∵$\frac{OC}{OA}=\frac{1}{2}=\frac{OE}{OB}$，$\angle AOC=90^\circ=\angle BOE$，

$\therefore \triangle AOC \backsim \triangle BOE$，
$\therefore \angle CAO = \angle EBO$，
$\therefore \angle CBA = 2\angle EBO = 2\angle CAB$.
（解法二）$\angle CBA = 2\angle CAB$，理由如下：
将 BC 沿 y 轴对折，交 x 轴于点 B'，如图 3 所示.
$\because$点 $B(\frac{3}{2},0)$，点 $C(0,2)$，点 $A(-4,0)$，

$\therefore$点 $B'(-\frac{3}{2},0)$，

$\therefore AB' = -\frac{3}{2}-(-4)=\frac{5}{2}$，$B'C=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$，
$\therefore AB' = B'C = BC$，
$\therefore \angle CAB = \angle ACB'$，$\angle CBA = \angle CB'B$.
$\because \angle AB'B = \angle CAB + \angle ACB'$，
$\therefore \angle CBA = 2\angle CAB$.

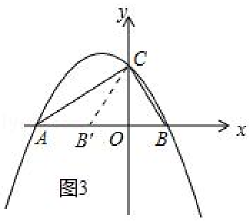


图3

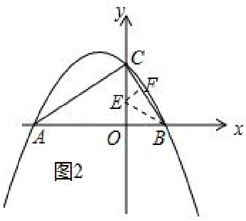


图2

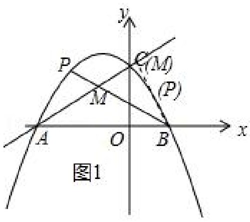


图1

【解析】(1)由点 A 的坐标，利用二次函数图象上点的坐标特征可求出 b 的值，代入 $y=0$ 求出 x 值，进而可得出点 B 的坐标；
(2)代入 $x=0$ 求出 y 值，进而可得出点 C 的坐标，由点 A、C 的坐标利用待定系数法可求出直线 AC 的解析式，假设存在，设点 M 的坐标为$(m,\frac{1}{2}m+2)$，分 B、P 在直线 AC 的同侧和异侧两种情况考虑，由点 B、M 的坐标结合 $PM{:}MB=1{:}2$ 即可得出点 P 的坐标，再利

用二次函数图象上点的坐标特征可得出关于 m 的一元二次方程，解之即可得出结论；
(3)（解法一）作$\angle CBA$的角平分线，交 y 轴于点 E，过点 E 作 $EF \perp BC$ 于点 F，设 $OE = n$，则 $CE = 2 - n$，$EF = n$，利用面积法可求出 n 值，进而可得出$\frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} = \frac{OE}{OB}$，结合$\angle AOC = 90° = \angle BOE$ 可证出$\triangle AOC \backsim \triangle BOE$，根据相似三角形的性质可得出$\angle CAO = \angle EBO$，再根据角平分线的性质可得出$\angle CBA = 2\angle EBO = 2\angle CAB$，此题得解；
（解法二）将 BC 沿 y 轴对折，交 x 轴于点 B'，根据点 A、B、C 的坐标可得出点 B'的坐标，进而可得出 $AB' = B'C = BC$，根据等腰三角形的性质结合三角形的外角性质，可得出$\angle CBA = 2\angle CAB$．;;

【解答】$\because$点 $A(-4,0)$在二次函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + bx + 2$ 的图象上，

$\therefore -\frac{16}{3} - 4b + 2 = 0$，

$\therefore b = -\frac{5}{6}$.

当 $y = 0$ 时，有$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2 = 0$，

解得：$x_1 = -4$，$x_2 = \frac{3}{2}$,

$\therefore$点 B 的坐标为$(\frac{3}{2},0)$.

故答案为：$-\frac{5}{6}$；$(\frac{3}{2},0)$．；当 $x = 0$ 时，$y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2 = 2$，
$\therefore$点 C 的坐标为$(0,2)$.
设直线 AC 的解析式为 $y = kx + c(k \neq 0)$，
将 $A(-4,0)$、$C(0,2)$代入 $y = kx + c$ 中，
得：$\begin{cases} -4k + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases}$，
$\therefore$直线 AC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 2$.

假设存在，设点 M 的坐标为$(m, \frac{1}{2}m + 2)$.

①当点 P、B 在直线 AC 的异侧时，点 P 的坐标为$(\frac{3}{2}m - \frac{3}{4}, \frac{3}{4}m + 3)$，

$\because$点 P 在抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2$ 上，

$\therefore \frac{3}{4}m + 3 = -\frac{1}{3} \times (\frac{3}{2}m - \frac{3}{4})^2 - \frac{5}{6} \times (\frac{3}{2}m - \frac{3}{4}) + 2$，
整理，得：$12m^2 + 20m + 9 = 0$.
$\because \Delta = 20^2 - 4 \times 12 \times 9 = -32 < 0$，
$\therefore$方程无解，即不存在符合题意得点 P；

②当点 P、B 在直线 AC 的同侧时，点 P 的坐标为$(\frac{1}{2}m + \frac{3}{4}, \frac{1}{4}m + 1)$，

$\because$点 P 在抛物线 $y = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 2$ 上，

$\therefore\frac{1}{4}m+1=-\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4})^2-\frac{5}{6}\times(\frac{1}{2}m+\frac{3}{4})+2$，

整理，得：$4m^2+44m-9=0$，

解得：$m_1=-\frac{11+\sqrt{130}}{2}$，$m_2=\frac{-11+\sqrt{130}}{2}$，

$\therefore$点 P 的横坐标为$-2-\frac{\sqrt{130}}{4}$或$-2+\frac{\sqrt{130}}{4}$.

综上所述：存在点 P，使得 $PM:MB=1:2$，点 P 的横坐标为$-2-\frac{\sqrt{130}}{4}$或$-2+\frac{\sqrt{130}}{4}$. ；

（解法一）$\angle CBA=2\angle CAB$，理由如下：

作$\angle CBA$ 的角平分线，交 y 轴于点 E，过点 E 作 $EF\perp BC$ 于点 F，如图 2 所示.

$\because$点 $B(\frac{3}{2},0)$，点 $C(0,2)$，

$\therefore OB=\frac{3}{2}$，$OC=2$，$BC=\frac{5}{2}$.

设 $OE=n$，则 $CE=2-n$，$EF=n$，

由面积法，可知：$\frac{1}{2}OB\cdot CE=\frac{1}{2}BC\cdot EF$，即$\frac{3}{2}(2-n)=\frac{5}{2}n$，

解得：$n=\frac{3}{4}$.

$\because\frac{OC}{OA}=\frac{1}{2}=\frac{OE}{OB}$，$\angle AOC=90^\circ=\angle BOE$，

$\therefore\triangle AOC\backsim\triangle BOE$，

$\therefore\angle CAO=\angle EBO$，

$\therefore\angle CBA=2\angle EBO=2\angle CAB$.

（解法二）$\angle CBA=2\angle CAB$，理由如下：

将 BC 沿 y 轴对折，交 x 轴于点 B'，如图 3 所示.

$\because$点 $B(\frac{3}{2},0)$，点 $C(0,2)$，点 $A(-4,0)$，

$\therefore$点 $B'(-\frac{3}{2},0)$，

$\therefore AB'=-\frac{3}{2}-(-4)=\frac{5}{2}$，$B'C=\sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{5}{2}$，

$\therefore AB'=B'C=BC$，

$\therefore\angle CAB=\angle ACB'$，$\angle CBA=\angle CB'B$.

$\because\angle AB'B=\angle CAB+\angle ACB'$，

$\therefore\angle CBA=2\angle CAB$.

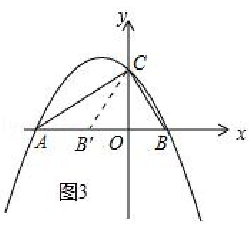


图3

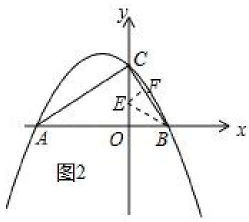


图2

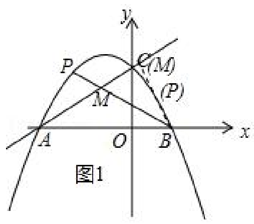


图1